

Câu hỏi và bài tập ôn tập cuối năm

1. a) Tính $\sin \frac{\pi}{8}$ và $\cos \frac{\pi}{8}$.

b) Chứng minh rằng có hằng số $C > 0$ để có đẳng thức

$$\sin x + (\sqrt{2} - 1)\cos x = C \cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) \text{ với mọi } x.$$

2. Giải phương trình

$$\tan x = \cot 2x.$$

Biểu diễn các nghiệm trên đường tròn lượng giác.

3. a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P(x) = (\sin x + \cos x)^3$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q(x) = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $R(x) = P(x) + Q(x)$.

4. Giải các phương trình :

a) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4}$;

b) $\sin^2 2x - \sin^2 x = \sin^2 \frac{\pi}{4}$;

c) $\cos x \cos 2x = \cos 3x$;

d) $\tan 2x - \sin 2x + \cos 2x - 1 = 0$.

5. Giải các phương trình sau :

a) $2\sin(x + 10^\circ) - \sqrt{12} \cos(x + 10^\circ) = 3$;

b) $\sqrt{3} \cos 5x + \sin 5x = 2\cos 3x$;

c) $\sin^2 x - 3\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0$.

6. Giải các phương trình sau :

a) $2\tan^2 x + 3 = \frac{3}{\cos x}$;

b) $\tan^2 x = \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x}$;

c) $\tan x + \tan 2x = \frac{\sin 3x}{\cos x}$.

7. Một đoàn tàu nhỏ có 3 toa khách đỗ ở sân ga. Có 3 hành khách bước lên tàu.

Hỏi :

a) Có bao nhiêu khả năng trong đó 3 hành khách lên 3 toa khác nhau ?

b) Có bao nhiêu khả năng trong đó 2 hành khách cùng lên một toa, còn hành khách thứ ba thì lên toa khác ?

8. Cho tập hợp $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ với $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Hỏi có bao nhiêu cặp $(x; y)$ với $x \in A, y \in A$ và $x > y$?

9. Một túi chứa 16 viên bi, trong đó có 7 viên bi trắng, 6 viên bi đen và 3 viên bi đỏ.

a) Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi trong túi.

– Tính xác suất để được 2 viên bi đen.

– Tính xác suất để được 1 viên bi đen và 1 viên bi trắng.

b) Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi trong túi.

– Tính xác suất để được 3 viên bi đỏ.

– Tính xác suất để được 3 viên bi với 3 màu khác nhau.

10. Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số điểm mà một vận động viên bắn cung nhận được khi bắn một lần. Giả sử X có bảng phân bố xác suất như sau :

X	9	7	5	3	1
P	0,2	0,36	0,23	0,14	0,07

- a) Tính điểm trung bình khi vận động viên đó bắn một lần.
 b) Tính điểm trung bình khi vận động viên đó bắn 48 lần.

11. Ta đã biết $\cos \frac{\pi}{2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Chứng minh rằng :

a) $\cos \frac{\pi}{2^3} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$;

b) $\cos \frac{\pi}{2^n} = \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\dots + \sqrt{2}}}}}_{n-1 \text{ dấu căn}}$ với mọi số nguyên $n \geq 2$.

12. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 3 \text{ và } u_n = 4u_{n-1} - 1 \text{ với mọi } n \geq 2.$$

Chứng minh rằng :

a) $u_n = \frac{2^{2n+1} + 1}{3}$ với mọi số nguyên $n \geq 1$;

b) (u_n) là một dãy số tăng.

13. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 5 \text{ và } u_n = u_{n-1} - 2 \text{ với mọi } n \geq 2.$$

- a) Hãy tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .
 b) Hãy tính tổng 100 số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) .

14. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 2 \text{ và } u_n = 3u_{n-1} \text{ với mọi } n \geq 2.$$

- a) Hãy tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .
 b) Hãy tính tổng 10 số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) .

15. Các số $x - y$, $x + y$ và $3x - 3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng, đồng thời các số $x - 2$, $y + 2$ và $2x + 3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Hãy tìm x và y .

16. Tính giới hạn của các dãy số sau :

a) $\lim \frac{n^4 - 40n^3 + 15n - 7}{n^4 + n + 100}$;

c) $\lim \frac{\sqrt{6n^4 + n + 1}}{2n + 1}$;

b) $\lim \frac{2n^3 + 35n^2 - 10n + 3}{5n^5 - n^3 + 2n}$;

d) $\lim \frac{3.2^n - 8.7^n}{4.3^n + 5.7^n}$.

17. Tính các giới hạn sau :

a) $\lim \sqrt{3n^4 - 10n + 12}$;

b) $\lim (2.3^n - 5.4^n)$;

c) $\lim \left(\sqrt{n^4 + n^2 + 1} - n^2 \right)$;

d) $\lim \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n - n}}$.

18. Tìm số hạng đầu và công bội của một cấp số nhân lùi vô hạn, biết rằng số hạng thứ hai là $\frac{12}{5}$ và tổng của cấp số nhân này là 15.

19. Tính giới hạn của các hàm số sau :

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x + 10}{x^3 + 6}$;

b) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 11x + 30}{25 - x^2}$;

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^6 + 4x^2 + x - 2}{(x^3 + 2)^2}$;

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 40}{2x^5 + 7x^4 + 21}$;

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^4 + 4x^2 + 3}}{2x + 1}$;

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1) \sqrt{\frac{x+1}{2x^3 + x}}$;

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{9x^2 + 11x - 100}$;

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{5x^2 + 1} - x\sqrt{5} \right)$;

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x}$.

20. Chứng minh rằng phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm.

21. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = \frac{ax^3 + bx^2 + c}{(a+b)x}$ (a, b, c là các hằng số);

b) $y = \left(x^3 - \frac{1}{x^3} + 3 \right)^4$; c) $y = x^3 \cos^2 x$;

d) $y = \sin \sqrt{4 + x^2}$; e) $y = \sqrt{1 + \tan \left(x + \frac{1}{x} \right)}$.

22. Cho hàm số $y = mx^3 + x^2 + x - 5$. Tìm m để :

- a) y' bằng bình phương của một nhị thức bậc nhất ;
- b) y' có hai nghiệm trái dấu ;
- c) $y' > 0$ với mọi x .

23. Giải các phương trình sau :

a) $y' = 0$, với $y = \frac{1}{2} \sin 2x + \sin x - 3$;

b) $y' = 0$, với $y = \sin 3x - 2\cos 3x - 3x + 4$.

24. Cho hyperbol (\mathcal{H}) xác định bởi phương trình $y = \frac{1}{x}$.

a) Tìm phương trình tiếp tuyến (T) của (\mathcal{H}) tại tiếp điểm A có hoành độ a (với $a \neq 0$).

b) Giả sử (T) cắt trục Ox tại điểm I và cắt trục Oy tại điểm J . Chứng minh rằng A là trung điểm của đoạn thẳng IJ . Từ đó suy ra cách vẽ tiếp tuyến (T) .

c) Chứng minh rằng diện tích tam giác OIJ không phụ thuộc vào vị trí của điểm A .

25. Một điểm M chuyển động trên parabol $y = -x^2 + 17x - 66$ theo hướng tăng của x . Một người quan sát đứng ở vị trí $P(2; 0)$.

Hãy xác định các giá trị của hoành độ điểm M để người quan sát có thể nhìn thấy được điểm M .