§ 5 ĐẠO HÀM CẤP CAO

1. Đạo hàm cấp hai

Xét hàm số $f(x) = x^3 - x^2 + 1$. Hàm số này có đạo hàm $f'(x) = 3x^2 - 2x$. Hiển nhiên, $y' = f'(x)$ cũng là một hàm số có đạo hàm và đạo hàm của nó là

$$\left[f'(x)\right]' = (3x^2 - 2x)' = 6x - 2.$$

Ta gọi đó là *đạo hàm cấp hai* của hàm số ban đầu.

Một cách tổng quát, ta có định nghĩa sau đây

ĐỊNH NGHĨA

Cho hàm số f có đạo hàm f'. Nếu f' cũng có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là *đạo hàm cấp hai* của hàm f và kí hiệu là f'', tức là

$$f'' = (f')'.$$

f' còn gọi là *đạo hàm cấp một* của hàm số f. Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$ còn được kí hiệu là y''.

Ví dụ 1. Tìm đạo hàm cấp hai của mỗi hàm số sau

a) $y = x^3 - 2x^2 + 1$; b) $y = \tan x$.

Giải

a) $y' = 3x^2 - 4x$; $y'' = (3x^2 - 4x)' = 6x - 4$.

b) $y' = 1 + \tan^2 x$; $y'' = (1 + \tan^2 x)' = 2\tan x\,(1 + \tan^2 x)$. □

H1 *Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số :* a) $y = \sqrt{x}$; b) $y = \sin x$.

2. Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

Ta đã biết : Nếu một chất điểm chuyển động có phương trình $s = s(t)$ thì vận tốc tại thời điểm t_0 của chất điểm đó là $v(t_0) = s'(t_0)$.

Bây giờ nếu t_0 nhận một số gia Δt thì $v(t_0)$ nhận một số gia là $\Delta v = v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)$. Khi $|\Delta t|$ càng nhỏ (khác 0) thì Δv càng phản ánh chính xác sự biến thiên vận tốc của chất điểm tại thời điểm t_0.

Trong cơ học, giới hạn hữu hạn (nếu có) của tỉ số $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ khi Δt dần đến 0 được gọi là *gia tốc tức thời tại thời điểm* t_0 (hay gia tốc tại thời điểm t_0) của chất điểm đó, và được kí hiệu là $a(t_0)$. Vậy

$$a(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Do đó, ta có thể phát biểu ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai như sau :

> *Gia tốc (tức thời) $a(t_0)$ tại thời điểm t_0 của một chất điểm chuyển động cho bởi phương trình $s = s(t)$ bằng đạo hàm cấp hai của hàm số $s = s(t)$ tại điểm t_0*, tức là
>
> $$a(t_0) = s''(t_0).$$

Gia tốc tại thời điểm t_0 đặc trưng cho sự biến đổi vận tốc của chuyển động tại thời điểm đó.

Ví dụ 2. Một chất điểm chuyển động có phương trình $S(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$.

(Phương trình này gọi là phương trình *dao động điều hoà*). Khi đó, vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t là

$$v(t) = S'(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi).$$

Gia tốc tức thời tại thời điểm t là

$$a(t) = S''(t) = v'(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi).$$ □

H2 *Phương trình chuyển động của một chất điểm là $S(t) = 5t - 3t^2$ (S tính bằng mét (m), t tính bằng giây (s)). Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 4$s.*

3. Đạo hàm cấp cao

Đạo hàm cấp một f' và đạo hàm cấp hai f'' của hàm số f còn được kí hiệu lần lượt là $f^{(1)}$ và $f^{(2)}$. Nếu $f^{(2)}$ là một hàm số có đạo hàm thì đạo hàm của nó gọi là đạo hàm cấp ba của hàm số f, kí hiệu là $f^{(3)}$. Tương tự, đạo hàm cấp n của một hàm số được định nghĩa bằng quy nạp như sau :

> Cho hàm số f có đạo hàm cấp $n - 1$ (với $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) là $f^{(n-1)}$. Nếu $f^{(n-1)}$ là hàm số có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là **đạo hàm cấp n** của hàm số f và kí hiệu là $f^{(n)}$. Nói cách khác,
>
> $$f^{(n)} = \left[f^{(n-1)}\right]', \ (n \in \mathbb{N}, n \geq 2).$$

Đạo hàm cấp n của hàm số $y = f(x)$ còn được kí hiệu là $y^{(n)}$.

Ví dụ 3. a) Đối với hàm số $y = x^3 + 7x^2 - 4x$, ta có :

$$y' = 3x^2 + 14x - 4 \ ; \ y'' = 6x + 14 \ ; \quad y^{(3)} = 6 \text{ và } y^{(n)} = 0 \text{ với mọi } n \geq 4.$$

b) Đối với hàm số $y = \sin x$, ta có :

$y' = \cos x$; $y'' = (\cos x)' = -\sin x$; $\quad y^{(3)} = y''' = (-\sin x)' = -\cos x$;

$y^{(4)} = (-\cos x)' = \sin x$; $\quad y^{(5)} = (\sin x)' = \cos x$; ... □

H3 *Quan sát ví dụ 3b) và cho biết khẳng định sau đúng hay sai : Nếu $y = \sin x$ thì $y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.*

Câu hỏi và bài tập

42. Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau đến cấp được cho kèm theo.

a) $f(x) = x^4 - \cos 2x$, $f^{(4)}(x)$;

b) $f(x) = \cos^2 x$, $f^{(5)}(x)$;

c) $f(x) = (x + 10)^6$, $f^{(n)}(x)$.

43. Chứng minh rằng với mọi $n \geq 1$, ta có :

a) Nếu $f(x) = \dfrac{1}{x}$ thì $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}$.

b) Nếu $f(x) = \cos x$ thì $f^{(4n)}(x) = \cos x$.

c) Nếu $f(x) = \sin ax$ (a là hằng số) thì $f^{(4n)}(x) = a^{4n} \sin ax$.

44. Vận tốc của một chất điểm chuyển động được biểu thị bởi công thức $v(t) = 8t + 3t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây (s) và $v(t)$ tính bằng mét/giây (m/s). Tìm gia tốc của chất điểm

a) Tại thời điểm $t = 4$;

b) Tại thời điểm mà vận tốc của chuyển động bằng 11.

Luyện tập

45. Tìm vi phân của mỗi hàm số sau :

a) $y = \tan^2 3x - \cot 3x^2$;

b) $y = \sqrt{\cos^2 2x + 1}$.

46. Dùng vi phân để tính gần đúng (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn) :

a) $\dfrac{1}{\sqrt{20,3}}$. *Hướng dẫn* : Xét hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ tại điểm $x_0 = 20,25 = 4,5^2$ với $\Delta x = 0,05$.

b) $\tan 29°30'$. *Hướng dẫn* : Xét hàm số $y = \tan x$ tại điểm $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$ với $\Delta x = -\dfrac{\pi}{360}$.

47. a) Cho hàm số $f(x) = \tan x$. Tính $f^{(n)}(x)$ với $n = 1, 2, 3$.

b) Chứng minh rằng nếu $f(x) = \sin^2 x$ thì $f^{(4n)}(x) = -2^{4n-1} \cos 2x$.

48. Chứng minh rằng :

a) Nếu $y = A\sin(\omega t + \varphi) + B\cos(\omega t + \varphi)$, trong đó A, B, ω và φ là những hằng số, thì $y'' + \omega^2 y = 0$.

b) Nếu $y = \sqrt{2x - x^2}$ thì $y^3 y'' + 1 = 0$.

Em có biết

VÀI NÉT VỀ SỰ RA ĐỜI CỦA KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM

Phép tính đạo hàm hay còn được gọi là *phép tính vi phân* đã được manh nha từ nửa đầu thế kỉ XVII.

Sau khi Đề-các (Descartes 1596 – 1650) phát minh ra phương pháp xác định toạ độ một điểm trong hệ trục toạ độ vuông góc (ngày nay gọi là hệ toạ độ Đề-các vuông góc) và cách biểu diễn hàm số bằng đồ thị thì ông và nhà toán học Phéc-ma (Fermat 1601 – 1665) đã đặt ra các bài toán : Tìm tiếp tuyến của đường cong, tìm cực đại và cực tiểu của hàm số. Để giải quyết các bài toán này, các ông đã tiếp cận được điều "cốt lõi" của khái niệm đạo hàm.

Có thể xem Phéc-ma là người đi tiên phong trong lĩnh vực xây dựng "phép tính vi phân". Ông là người đầu tiên đã giải quyết một số bài toán liên quan đến vấn đề cực trị và vấn đề tiếp tuyến trên cơ sở các "vô cùng bé". Điều này không xa với khởi thuỷ của khái niệm đạo hàm.

Tuy nhiên phải đến nửa cuối thế kỉ XVII, các nhà toán học mới đặt được nền móng vững chắc cho phép tính vi phân. Các nhà toán học có công lớn trong lĩnh vực này phải kể đến Niu-tơn (Newton 1642 – 1727) và Lai-bơ-nít (Leibniz 1646 – 1716). Trong lời nói đầu của một tác phẩm của mình in năm 1684, Lai-bơ-nít đã viết :

"Với sự hiểu biết về phép tính mà tôi gọi là *vi phân*, người ta có thể giải quyết được các bài toán tìm cực đại, cực tiểu và tìm tiếp tuyến".

Đến cuối thế kỉ XVIII và đầu thế kỉ XIX, phép tính vi phân và bạn đồng hành với nó là phép tính tích phân đã được xây dựng hoàn chỉnh bởi các nhà toán học Gau-xơ (Gauss 1777 – 1855), A-ben (Abel 1802 – 1829), Cô-si (Cauchy 1789 – 1857) và Vai-ơ-xtrát (Weierstrass 1815 – 1897).