

§ 3

ĐẠO HÀM CỦA CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Muốn xây dựng công thức tính đạo hàm của các hàm số lượng giác, trước hết chúng ta cần nghiên cứu giới hạn cơ bản sau đây.

1. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

Để hình dung giá trị của giới hạn này, ta dùng máy tính bỏ túi lập bảng giá trị của biểu thức $\frac{\sin x}{x}$ khi x nhận các giá trị dương và rất gần điểm 0 như sau :

x (radian)	$\frac{\pi}{180}$	$\frac{\pi}{360}$	$\frac{\pi}{720}$	$\frac{\pi}{1800}$	$\frac{\pi}{5400}$
$\frac{\sin x}{x}$	0,999949321	0,999987307	0,999996826	0,999999492	0,999999943

Qua bảng trên ta thấy khi x càng nhỏ thì giá trị của biểu thức $\frac{\sin x}{x}$ càng gần đến 1.

Ta đã chứng minh được định lí sau đây (xem bài đọc thêm trang 154).

ĐỊNH LÍ 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

CHÚ Ý

Người ta cũng chứng minh được kết quả sau đây : Nếu hàm số $u = u(x)$ thoả mãn các điều kiện : $u(x) \neq 0$ với mọi $x \neq x_0$ và

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0 \text{ thì}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1.$$

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$;

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

Giải

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right) = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2 \cdot 1 = 2.$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2$
 $= \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$ □

H1 Cho $m = \lim_{x \rightarrow 0} (x \cot 3x)$. Hãy tìm kết quả đúng trong các kết quả sau đây.

- (A) $m = 0$; (B) $m = 3$; (C) $m = 1$; (D) $m = \frac{1}{3}$.

2. Đạo hàm của hàm số $y = \sin x$

ĐỊNH LÝ 2

a) Hàm số $y = \sin x$ có đạo hàm trên \mathbb{R} , và $(\sin x)' = \cos x$.

b) Nếu hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm trên J thì trên J ta có

$$(\sin u(x))' = (\cos u(x)) \cdot u'(x).$$

Ghi chú. Công thức nêu trong định lý 2b) có thể viết gọn là

$$(\sin u)' = (\cos u) \cdot u' = u' \cos u.$$

Chứng minh

a) Ta tính đạo hàm của hàm số $y = \sin x$ tại điểm x bất kì thuộc \mathbb{R} bằng định nghĩa.

$$\bullet \Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}.$$

$$\bullet \text{ Tìm giới hạn } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \frac{1}{2} \right].$$

Do $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$ và $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$ (vì hàm số $y = \cos x$ liên

tục) nên $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x$. Vậy $(\sin x)' = \cos x$. \square

b) Công thức đạo hàm của $\sin(u(x))$ được suy ra từ kết quả trên và công thức lấy đạo hàm của hàm số hợp.

Ví dụ 2. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin(x^3 - x + 2)$.

Giải

$$[\sin(x^3 - x + 2)]' = [\cos(x^3 - x + 2)] \cdot (x^3 - x + 2)' = (3x^2 - 1)\cos(x^3 - x + 2). \quad \square$$

H2 Cho hàm số $y = \sin \sqrt{x}$. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau :

$$(A) y' = \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} ; (B) y' = \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} ; (C) y' = \cos \sqrt{x} ; (D) y' = \cos \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

3. Đạo hàm của hàm số $y = \cos x$

Từ công thức tính đạo hàm của hàm số $y = \sin u(x)$, ta có

$$\begin{aligned} (\cos x)' &= \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right]' = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x. \end{aligned}$$

Ta suy ra định lí sau

ĐỊNH LÍ 3

- a) Hàm số $y = \cos x$ có đạo hàm trên \mathbb{R} và $(\cos x)' = -\sin x$.
b) Nếu hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm trên J thì trên J ta có
$$(\cos u(x))' = (-\sin u(x)) u'(x).$$

Ghi chú. Công thức nêu trong định lí 3b) có thể viết gọn là

$$(\cos u)' = (-\sin u) \cdot u'.$$

H3 Cho hàm số $y = \cos^2 x$. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau :

- (A) $y' = \sin^2 x$; (B) $y' = -\sin^2 x$; (C) $y' = \sin 2x$; (D) $y' = -\sin 2x$.

4. Đạo hàm của hàm số $y = \tan x$

H4 Sử dụng quy tắc tính đạo hàm của một thương hai hàm số, hãy tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Từ đó suy ra định lí sau :

ĐỊNH LÍ 4

- a) Hàm số $y = \tan x$ có đạo hàm trên mỗi khoảng
 $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ (với $k \in \mathbb{Z}$), và
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$
- b) Giả sử hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm trên J và $u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
($k \in \mathbb{Z}$) với mọi $x \in J$. Khi đó, trên J ta có
$$(\tan u(x))' = \frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}.$$

Ghi chú. Công thức nêu trong định lí 4b) có thể viết gọn là

$$\boxed{(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}}$$

Ví dụ 3. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{\tan x}$.

Giải

$$\left(\sqrt{\tan x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\tan x}}(\tan x)' = \frac{1}{2\sqrt{\tan x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{2\cos^2 x\sqrt{\tan x}}$$

Do $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ nên kết quả trên còn viết là

$$\left(\sqrt{\tan x}\right)' = \frac{1 + \tan^2 x}{2\sqrt{\tan x}}$$

□

5. Đạo hàm của hàm số $y = \cot x$

Tương tự định lí 4, ta có

ĐỊNH LÍ 5

a) Hàm số $y = \cot x$ có đạo hàm trên mỗi khoảng $(k\pi; (k+1)\pi)$ (với $k \in \mathbb{Z}$), và

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

b) Giả sử hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm trên J và $u(x) \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) với mọi $x \in J$. Khi đó trên J ta có

$$\left(\cot u(x)\right)' = -\frac{u'(x)}{\sin^2 u(x)}$$

Ghi chú. Công thức nêu trong định lí 5b) có thể viết gọn là

$$\boxed{(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}}$$

Ví dụ 4. Tính đạo hàm của hàm số $y = \cot^3 2x$.

Giải

$$(\cot^3 2x)' = 3(\cot^2 2x)(\cot 2x)' = 3(\cot^2 2x) \left(-\frac{(2x)'}{\sin^2 2x} \right) = -\frac{6 \cos^2 2x}{\sin^4 2x}.$$

Vì $\frac{1}{\sin^2 2x} = 1 + \cot^2 2x$ nên kết quả trên còn viết là

$$(\cot^3 2x)' = -6(\cot^2 2x)(1 + \cot^2 2x). \quad \square$$

H5 Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả nêu sau đây đối với mỗi hàm số đã cho.

a) Cho $y = \tan 2x + \cot 2x$.

$$\begin{array}{ll} \text{(A)} \quad y' = \frac{1}{\cos^2 2x} - \frac{1}{\sin^2 2x}; & \text{(B)} \quad y' = \frac{2}{\sin^2 2x} - \frac{2}{\cos^2 2x}; \\ \text{(C)} \quad y' = 2(\tan^2 2x - \cot^2 2x); & \text{(D)} \quad y' = \tan^2 2x - \cot^2 2x. \end{array}$$

b) Cho $y = \cot(\sin 5x)$.

$$\begin{array}{ll} \text{(A)} \quad y' = -(1 + \cot^2(\sin 5x))\cos 5x; & \text{(B)} \quad y' = -5(1 + \cot^2(\sin 5x))\cos 5x; \\ \text{(C)} \quad y' = (1 + \cot^2(\sin 5x))\cos 5x; & \text{(D)} \quad y' = 5(1 + \cot^2(\sin 5x))\cos 5x. \end{array}$$

Câu hỏi và bài tập

28. Tìm các giới hạn sau :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \sin 2x}; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}.$$

29. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = 5\sin x - 3\cos x; & \text{b) } y = \sin(x^2 - 3x + 2); \\ \text{c) } y = \cos \sqrt{2x + 1}; & \text{d) } y = 2\sin 3x \cos 5x; \\ \text{e) } y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}; & \text{f) } y = \sqrt{\cos 2x}. \end{array}$$

30. Chứng minh rằng hàm số $y = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x$ có đạo hàm bằng 0.

31. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = \tan \frac{x+1}{2}$;

b) $y = \cot \sqrt{x^2 + 1}$;

c) $y = \tan^3 x + \cot 2x$;

d) $y = \tan 3x - \cot 3x$;

e) $y = \sqrt{1 + 2 \tan x}$;

f) $y = x \cot x$.

32. Chứng minh rằng :

a) Hàm số $y = \tan x$ thoả mãn hệ thức $y' - y^2 - 1 = 0$;

b) Hàm số $y = \cot 2x$ thoả mãn hệ thức $y' + 2y^2 + 2 = 0$.

Luyện tập

33. Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau :

a) $y = \frac{\sin x}{x} + \frac{x}{\sin x}$;

b) $y = \frac{\sin^2 x}{1 + \tan 2x}$;

c) $y = \tan(\sin x)$;

d) $y = x \cot(x^2 - 1)$;

e) $y = \cos^2 \sqrt{\frac{\pi}{4} - 2x}$;

f) $y = x \sqrt{\sin 3x}$.

34. Tính $f'(\pi)$ nếu $f(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x - x \sin x}$.

35. Giải phương trình $y' = 0$ trong mỗi trường hợp sau :

a) $y = \sin 2x - 2 \cos x$;

b) $y = 3 \sin 2x + 4 \cos 2x + 10x$;

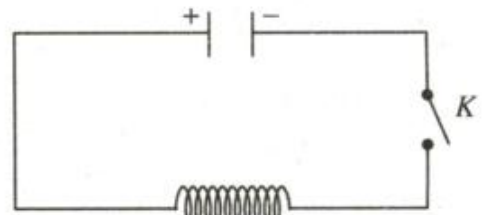
c) $y = \cos^2 x + \sin x$;

d) $y = \tan x + \cot x$.

36. Cho hàm số $f(x) = 2 \cos^2(4x - 1)$. Chứng minh rằng với mọi x ta có $|f'(x)| \leq 8$. Tìm các giá trị của x để đẳng thức xảy ra.

37. Cho mạch điện như hình 5.7. Lúc đầu tụ điện có điện tích Q_0 . Khi đóng khoá K , tụ điện phóng điện qua cuộn dây ; điện tích q của tụ điện phụ thuộc vào thời gian t theo công thức

$$q(t) = Q_0 \sin \omega t,$$



Hình 5.7

trong đó, ω là tốc độ góc. Biết rằng cường độ $I(t)$ của dòng điện tại thời điểm t được tính theo công thức

$$I(t) = q'(t).$$

Cho biết $Q_0 = 10^{-8}$ C và $\omega = 10^6\pi$ rad/s. Hãy tính cường độ của dòng điện tại thời điểm $t = 6$ s (tính chính xác đến 10^{-5} mA).

38. Cho hàm số $y = \cos^2 x + m \sin x$ (m là tham số) có đồ thị là (C) . Tìm m trong mỗi trường hợp sau :

a) Tiếp tuyến của (C) tại điểm với hoành độ $x = \pi$ có hệ số góc bằng 1.

b) Hai tiếp tuyến của (C) tại các điểm có hoành độ $x = -\frac{\pi}{4}$ và $x = \frac{\pi}{3}$ song song hoặc trùng nhau.