A. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

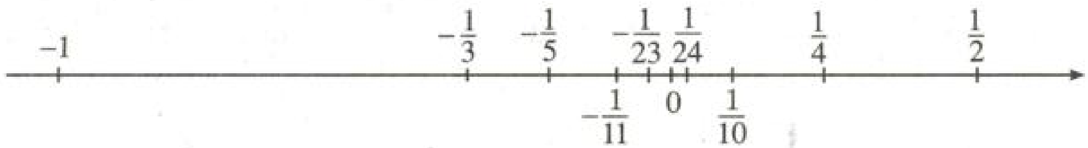
§ 1 DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN 0

1. Định nghĩa dãy số có giới hạn 0

Xét dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, tức là dãy số

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{10}, -\frac{1}{11}, \ldots, -\frac{1}{23}, \frac{1}{24}, \ldots$$

Biểu diễn các số hạng của dãy số đã cho trên trục số, ta thấy khi n tăng thì các điểm biểu diễn chụm lại quanh điểm 0 (h. 4.1).



Hình 4.1

Khoảng cách $|u_n| = \dfrac{1}{n}$ từ điểm u_n đến điểm 0 trở nên nhỏ bao nhiêu cũng được miễn là n đủ lớn.

Điều này được giải thích rõ hơn trong bảng sau :

n	1	2	3	...	10	11	12	...	23	24	25	...	50	51	52	...
$\lvert u_n \rvert$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	...	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{12}$	...	$\frac{1}{23}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{25}$	...	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{51}$	$\frac{1}{52}$	...

– Mọi số hạng của dãy số đã cho, kể từ số hạng thứ 11 trở đi, đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn $\dfrac{1}{10}$, tức là

$$|u_n| = \frac{1}{n} < \frac{1}{10} \text{ với mọi } n > 10.$$

– Mọi số hạng của dãy số đã cho, kể từ số hạng thứ 24 trở đi, đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn $\frac{1}{23}$, tức là

$$|u_n| < \frac{1}{23} \text{ với mọi } n > 23.$$

H1 *Kể từ số hạng thứ mấy trở đi, mọi số hạng của dãy số đã cho đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn* $\frac{1}{50}$.

Cũng câu hỏi đó cho mỗi số : $\frac{1}{75}$; $\frac{1}{500}$; $\frac{1}{1\,000\,000}$.

Như vậy mọi số hạng của dãy số đã cho, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn một số dương nhỏ tuỳ ý cho trước. Ta nói rằng dãy số $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ có giới hạn là 0.

Một cách tổng quát, ta có

ĐỊNH NGHĨA

> Ta nói rằng **dãy số (u_n) có giới hạn 0** (hay có giới hạn là 0) nếu với mỗi số dương nhỏ tuỳ ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn số dương đó.
>
> Khi đó ta viết
>
> $$\lim(u_n) = 0 \text{ hoặc } \lim u_n = 0 \text{ hoặc } u_n \to 0.$$

(Kí hiệu "$\lim u_n = 0$" còn được viết "$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$", đọc là dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần đến vô cực).

Nhận xét

Từ định nghĩa suy ra rằng

a) Dãy số (u_n) có giới hạn 0 khi và chỉ khi dãy số $(|u_n|)$ có giới hạn 0.

Chẳng hạn, ta có $\lim\frac{1}{n} = 0$ vì $\frac{1}{n} = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right|$ và $\lim\frac{(-1)^n}{n} = 0$.

b) Dãy số không đổi (u_n), với $u_n = 0$ có giới hạn 0.

2. Một số dãy số có giới hạn 0

Dựa vào định nghĩa, người ta chứng minh được rằng

a) $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$; b) $\lim \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0.$

Định lí sau đây thường được sử dụng để chứng minh một số dãy số có giới hạn 0.

ĐỊNH LÍ 1

> Cho hai dãy số (u_n) và (v_n).
> Nếu $|u_n| \leq v_n$ với mọi n và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.

Chứng minh. Cho một số dương nhỏ tuỳ ý. Vì $\lim v_n = 0$ nên kể từ số hạng thứ N nào đó trở đi mọi số hạng của dãy số (v_n) đều nhỏ hơn số dương đó. Do $|u_n| \leq v_n$ nên mọi số hạng của dãy số (u_n), kể từ số hạng thứ N trở đi, đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn số dương đã cho. Vậy $\lim u_n = 0$. □

Ví dụ 1. Chứng minh rằng $\lim \dfrac{\sin n}{\sqrt{n}} = 0$.

Giải

Ta có

$$\left|\frac{\sin n}{\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ và } \lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Từ đó suy ra điều cần chứng minh. □

H2 *Cho k là một số nguyên dương. Chứng minh rằng* $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0.$

Áp dụng định lí 1, có thể chứng minh định lí sau :

ĐỊNH LÍ 2

> Nếu $|q| < 1$ thì $\lim q^n = 0$.

Ví dụ 2

a) $\lim \dfrac{1}{2^n} = \lim \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$; b) $\lim \dfrac{(-2)^n}{3^n} = \lim \left(\dfrac{-2}{3}\right)^n = 0.$

H3 *Chứng minh rằng* $\lim \dfrac{\cos \frac{n\pi}{5}}{4^n} = 0.$

Câu hỏi và bài tập

1. Chứng minh rằng các dãy số với số hạng tổng quát sau đây có giới hạn 0 :

a) $\dfrac{(-1)^n}{n+5}$; b) $\dfrac{\sin n}{n+5}$; c) $\dfrac{\cos 2n}{\sqrt{n}+1}$.

2. Chứng minh rằng hai dãy số (u_n) và (v_n) với

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}, \qquad v_n = \frac{(-1)^n \cos n}{n^2+1}$$

có giới hạn 0.

3. Chứng minh rằng các dãy số (u_n) sau đây có giới hạn 0 :

a) $u_n = (0{,}99)^n$; b) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2^n+1}$; c) $u_n = -\dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{5}}{(1{,}01)^n}$.

4. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n}{3^n}$.

a) Chứng minh rằng $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{2}{3}$ với mọi n.

b) Bằng phương pháp quy nạp, chứng minh rằng $0 < u_n \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ với mọi n.

c) Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn 0.