§ 2 DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN HỮU HẠN

1. Định nghĩa dãy số có giới hạn hữu hạn

Xét dãy số (u_n) với $u_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n}$. Ta có

$$\lim(u_n - 3) = \lim\frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn là 3.

Một cách tổng quát, ta có :

ĐỊNH NGHĨA

Ta nói rằng **dãy số (u_n) có giới hạn là số thực L** nếu $\lim(u_n - L) = 0$. Khi đó ta viết

$$\lim(u_n) = L \text{ hoặc } \lim u_n = L \text{ hoặc } u_n \to L.$$

Dãy số có giới hạn là một số thực gọi là **dãy số có giới hạn hữu hạn**.

Ví dụ 1. Dãy số không đổi (u_n) với $u_n = c$ (c là hằng số) có giới hạn là c vì

$$\lim(u_n - c) = \lim(c - c) = \lim 0 = 0. \qquad \square$$

Ví dụ 2. Chứng minh rằng $\lim\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - 1\right) = -1$.

Giải

Đặt $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - 1$.

Vì $\lim(u_n - (-1)) = \lim\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$ nên $\lim u_n = -1$. $\square$

H1 *Chứng minh rằng :*

a) $\lim\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1\right) = 1$; b) $\lim\left(\frac{2 - 5n}{2n}\right) = -\frac{5}{2}$.

Nhận xét

1) Từ định nghĩa vừa nêu, suy ra rằng $\lim u_n = L$ khi và chỉ khi khoảng cách $|u_n - L|$ từ điểm u_n đến điểm L trở nên nhỏ bao nhiêu cũng được miễn là n đủ lớn ; nói một cách hình ảnh, khi n tăng các điểm u_n chụm lại quanh điểm L.

2) Không phải mọi dãy số đều có giới hạn hữu hạn. Chẳng hạn dãy số $((-1)^n)$, tức là dãy số

$$-1, 1, -1, 1, \ldots.$$

không có giới hạn hữu hạn.

Trên trục số, các số hạng của dãy số đó được biểu diễn bởi hai điểm -1 và 1. Khi n tăng các điểm $(-1)^n$ không chụm lại quanh bất kì một điểm L nào.

2. Một số định lí

Ta thừa nhận các định lí sau

ĐỊNH LÍ 1

> Giả sử $\lim u_n = L$. Khi đó
> a) $\lim |u_n| = |L|$ và $\lim \sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{L}$;
> b) Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n thì $L \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{L}$.

Ví dụ 3. $\lim \sqrt{9 + \dfrac{\cos 2n}{n}} = 3$ vì $\lim \left(9 + \dfrac{\cos 2n}{n}\right) = 9$. □

H2 *Tìm* $\lim \sqrt[3]{\dfrac{27n^2 - n}{n^2}}$.

ĐỊNH LÍ 2

> Giả sử $\lim u_n = L$, $\lim v_n = M$ và c là một hằng số. Khi đó
> $\lim(u_n + v_n) = L + M$,
> $\lim(u_n - v_n) = L - M$,
> $\lim(u_n . v_n) = LM$,
> $\lim(cu_n) = cL$,
> $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{L}{M}$ (nếu $M \neq 0$).

Ví dụ 4. Tìm $\lim u_n$, với $u_n = \dfrac{3n^2 + 4n - 7}{n^2}$.

Giải

Ta có

$$\lim u_n = \lim\left(3 + \frac{4}{n} - \frac{7}{n^2}\right) = \lim 3 + \lim \frac{4}{n} - \lim \frac{7}{n^2}$$

$$= \lim 3 + 4\lim \frac{1}{n} - 7\lim \frac{1}{n^2} = 3 + 4.0 - 7.0 = 3.$$ □

Ví dụ 5. Tìm $\lim u_n$ với $u_n = \dfrac{2n^3 - 4n^2 + 3n + 3}{n^3 - 5n + 7}$.

Giải

Chia tử và mẫu của phân thức cho n^3 (n^3 là luỹ thừa bậc cao nhất của n trong tử và mẫu của phân thức), ta được

$$u_n = \frac{2 - \dfrac{4}{n} + \dfrac{3}{n^2} + \dfrac{3}{n^3}}{1 - \dfrac{5}{n^2} + \dfrac{7}{n^3}}.$$

Vì

$$\lim\left(2 - \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{3}{n^3}\right) = \lim 2 - \lim\frac{4}{n} + \lim\frac{3}{n^2} + \lim\frac{3}{n^3} = 2$$

và $\lim\left(1 - \dfrac{5}{n^2} + \dfrac{7}{n^3}\right) = 1 \neq 0$ nên $\lim\dfrac{2n^3 - 4n^2 + 3n + 3}{n^3 - 5n + 7} = \dfrac{2}{1} = 2.$ □

H3 *Tìm giới hạn của dãy số (u_n) với* $u_n = \dfrac{n^2 - n + 3}{n^3 + 2n}$.

3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

Xét cấp số nhân vô hạn

$$u_1, u_1q, u_1q^2, ..., u_1q^n, ...$$

có công bội q với $|q| < 1$ (gọi là một *cấp số nhân lùi vô hạn*).

Ta biết rằng tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó là

$$S_n = u_1 + u_1q + ... + u_1q^{n-1} = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{u_1}{1-q} - \frac{u_1}{1-q}q^n.$$

Vì $|q| < 1$ nên $\lim q^n = 0$. Do đó

$$\lim S_n = \frac{u_1}{1-q}.$$

Ta gọi giới hạn đó là **tổng của cấp số nhân** đã cho và viết

$$\boxed{S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + ... = \frac{u_1}{1-q}.}$$

H4 *Tìm tổng của cấp số nhân*

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, ..., \frac{1}{2^n}, ...$$

Ví dụ 6. Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn 0,777... dưới dạng phân số.

Giải

Ta có $0,777... = \frac{7}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} + ...$

Đây là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1 = \frac{7}{10}$ và công bội $q = \frac{1}{10}$. Do đó

$$0,777... = \frac{\frac{7}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{7}{9}.$$ □

H5 *Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn* 0,313131... *dưới dạng phân số.*

Câu hỏi và bài tập

5. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\left(2 + \frac{(-1)^n}{n+2}\right)$;

b) $\lim\left(\frac{\sin 3n}{4n} - 1\right)$;

c) $\lim\frac{n-1}{n}$;

d) $\lim\frac{n+2}{n+1}$.

6. Tìm $\lim u_n$ với

a) $u_n = \frac{n^2 - 3n + 5}{2n^2 - 1}$;

b) $u_n = \frac{-2n^2 + n + 2}{3n^4 + 5}$;

c) $u_n = \frac{\sqrt{2n^2 - n}}{1 - 3n^2}$;

d) $u_n = \frac{4^n}{2.3^n + 4^n}$.

7. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 10 \text{ và } u_{n+1} = \frac{u_n}{5} + 3 \text{ với mọi } n \geq 1.$$

a) Chứng minh rằng dãy số (v_n) xác định bởi $v_n = u_n - \frac{15}{4}$ là một cấp số nhân.

b) Tìm $\lim u_n$.

8. Cho một tam giác đều ABC cạnh a. Tam giác $A_1B_1C_1$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác ABC, tam giác $A_2B_2C_2$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1$, ..., tam giác $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_nB_nC_n$, ... Gọi $p_1, p_2, ..., p_n, ...$ và $S_1, S_2, ..., S_n, ...$ theo thứ tự là chu vi và diện tích của các tam giác $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, ..., $A_nB_nC_n$, ...

a) Tìm giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n).

b) Tìm các tổng

$$p_1 + p_2 + ... + p_n + ... \text{ và } S_1 + S_2 + ... + S_n + ...$$

9. Biểu diễn các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng phân số :

a) 0,444... ; b) 0,2121... ; c) 0,32111... .

10. Gọi C là nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$,

C_1 là đường gồm hai nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{2}$,

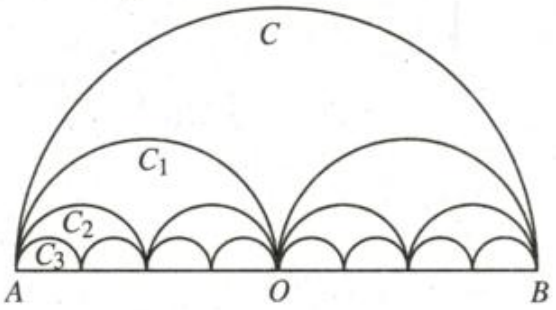
C_2 là đường gồm bốn nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{4}$, ...

C_n là đường gồm 2^n nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{2^n}$, ... (h. 4.2).

Gọi p_n là độ dài của C_n, S_n là diện tích hình phẳng giới hạn bởi C_n và đoạn thẳng AB.

a) Tính p_n và S_n.

b) Tìm giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n).



Hình 4.2

Bài đọc thêm

ĐOÁN NHẬN GIỚI HẠN CỦA MỘT DÃY SỐ THỰC BẰNG HÌNH HỌC

1) Ta đã biết tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

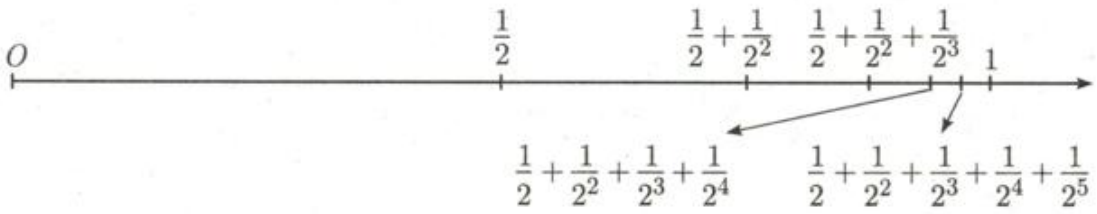
$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, ..., \frac{1}{2^n}, ...$$

là

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... = 1$$

(xem **H4** trong §2).

Có thể đoán nhận được kết quả này nhờ hình 4.3 hoặc hình 4.4.



Hình 4.3

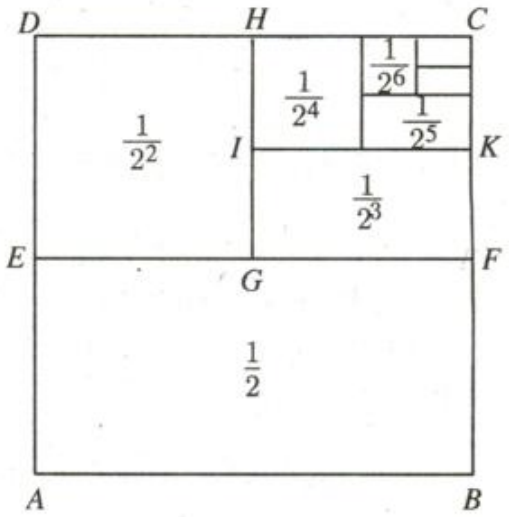
Ở hình 4.3 : trung điểm của đoạn [0 ; 1] là điểm $\frac{1}{2}$, trung điểm của đoạn $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ là điểm $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$, trung điểm của đoạn $\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}; 1\right]$ là điểm $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}$, ...

Do đó

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... = 1.$$

Ở hình 4.4 : hình vuông *ABCD* có cạnh dài 1 đơn vị và diện tích bằng 1, hình chữ nhật *AEFB* có diện tích bằng $\frac{1}{2}$, hình vuông *DHGE* có diện tích bằng $\frac{1}{2^2}$, hình chữ nhật *GIKF* có diện tích bằng $\frac{1}{2^3}$, ...

Do đó $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... = 1.$



Hình 4.4

2) Xét bài toán sau :

Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi

$$u_1 = c \text{ và } u_{n+1} = au_n + b \text{ với } n \geq 1,$$

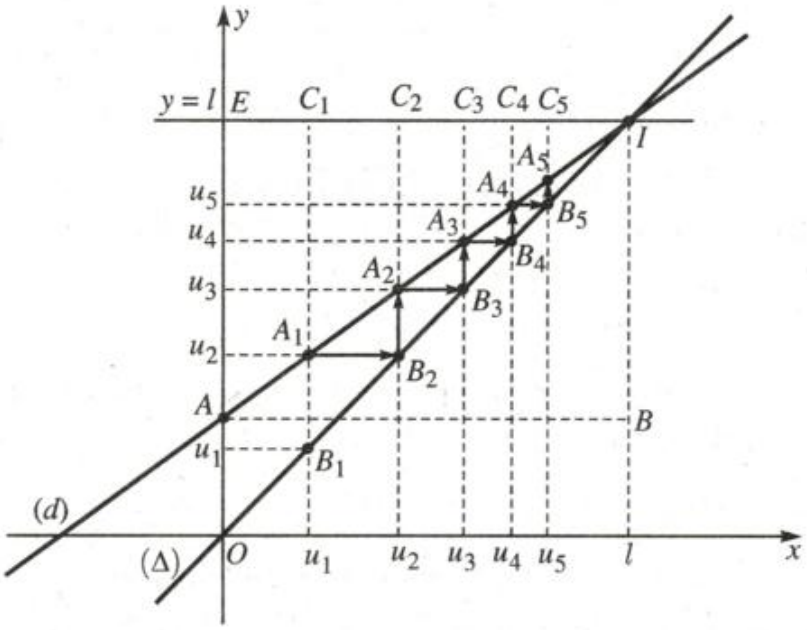
trong đó a, b, c là những số thực cho trước, $0 < a < 1$ và $b \neq 0$.

Tìm giới hạn của dãy số đã cho.

Để đoán nhận giới hạn của dãy số đã cho, ta sẽ biểu diễn các số hạng của nó trên hai trục toạ độ (h. 4.5). Dựng hai đường thẳng (d) và (Δ) theo thứ tự có phương trình là $y = ax + b$ và $y = x$ (ở đây ta giả thiết $b > 0$; trong trường hợp $b < 0$, cách giải và kết quả hoàn toàn tương tự). Gọi A_1 và B_1 theo thứ tự là giao điểm của đường thẳng $x = u_1$ với đường thẳng (d) và đường thẳng (Δ). Điểm A_1 có tung độ $au_1 + b = u_2$ và điểm B_1 có tung độ là u_1. Đường thẳng đi qua A_1 và song song với trục hoành cắt (Δ) tại B_2. Điểm B_2 có hoành độ là u_2. Đường thẳng đi qua B_2 và song song với trục tung cắt (d) tại điểm A_2. Tung độ của A_2 là $au_2 + b = u_3$. Các điểm $B_3, A_3, B_4, A_4, \ldots, B_n, A_n, \ldots$ được xác định một cách tương tự.

Gọi $I\ (l\ ;\ l)$ là giao điểm của hai đường thẳng (d) và (Δ). Khi n tăng thì điểm A_n ngày càng dần đến điểm I, các điểm u_n trên trục hoành (và trên trục tung) ngày càng dần đến điểm l, tức là

$$\lim u_n = l.$$



Hình 4.5

Vì I là giao điểm của hai đường thẳng (d) và (Δ) nên l là nghiệm của phương trình

$$ax + b = x,$$

tức là

$$x = l = \frac{b}{1-a}.$$

Nhận xét

Gọi $C_1, C_2, ..., C_n, ...$ là các giao điểm của đường thẳng $y = l$ với các đường thẳng $x = u_1, x = u_2, ..., x = u_n, ...$.

Khi đó

$$\frac{A_1C_1}{B_1C_1} = \frac{AE}{OE} = \frac{BI}{AB} = a.$$

Vì $A_1C_1 = l - u_2$ và $B_1C_1 = l - u_1$ nên từ đó ta có

$$\frac{l-u_2}{l-u_1} = a.$$

Chứng minh tương tự, ta có

$$\frac{l-u_{n+1}}{l-u_n} = a \text{ với mọi } n.$$

Do đó, nếu đặt $v_n = l - u_n$ thì dãy số (v_n) là một cấp số nhân lùi vô hạn.