

§ 3 DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN VÔ CỰC

1. Dãy số có giới hạn $+\infty$

Xét dãy số (u_n) với $u_n = 2n - 3$.

Ta thấy khi n tăng thì u_n trở nên lớn bao nhiêu cũng được miễn là n đủ lớn. Nói cách khác, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều lớn hơn một số dương lớn tùy ý cho trước.

Ta nói rằng dãy số $(2n - 3)$ có giới hạn là $+\infty$.

Một cách tổng quát, ta có

ĐỊNH NGHĨA

Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ nếu với mỗi số dương tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều lớn hơn số dương đó.

Khi đó ta viết

$$\lim(u_n) = +\infty \text{ hoặc } \lim u_n = +\infty \text{ hoặc } u_n \rightarrow +\infty.$$

Áp dụng định nghĩa trên có thể chứng minh rằng :

a) $\lim n = +\infty$; b) $\lim \sqrt{n} = +\infty$; c) $\lim \sqrt[3]{n} = +\infty$.

2. Dãy số có giới hạn $-\infty$

ĐỊNH NGHĨA

Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ nếu với mỗi số âm tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều nhỏ hơn số âm đó.

Khi đó ta viết

$$\lim(u_n) = -\infty \text{ hoặc } \lim u_n = -\infty \text{ hoặc } u_n \rightarrow -\infty.$$

Dễ dàng thấy rằng

$$\lim u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n) = +\infty.$$

Ví dụ 1. Vì $\lim(2n - 3) = +\infty$ nên $\lim(-2n + 3) = -\infty$.

CHÚ Ý

Các dãy số có giới hạn $+\infty$ và $-\infty$ được gọi chung là các *dãy số có giới hạn vô cực hay dần đến vô cực*.

Nhận xét. Nếu $\lim |u_n| = +\infty$ thì $|u_n|$ trở nên lớn bao nhiêu cũng được, miễn là n đủ lớn. Do đó $\left| \frac{1}{u_n} \right| = \frac{1}{|u_n|}$ trở nên nhỏ bao nhiêu cũng được, miễn là n đủ lớn.

Người ta chứng minh được

ĐỊNH LÝ

Nếu $\lim|u_n| = +\infty$ thì $\lim \frac{1}{u_n} = 0$.

3. Một vài quy tắc tìm giới hạn vô cực

Vì $+\infty$ và $-\infty$ không phải là những số thực nên không áp dụng được các định lý trong §2 cho các dãy số có giới hạn vô cực. Khi tìm các giới hạn vô cực, ta có thể sử dụng các quy tắc sau đây.

a) Quy tắc 1

Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim(u_n v_n)$ được cho trong bảng sau :

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n v_n)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Ví dụ 2. Vì $n^2 = n \cdot n$ và $\lim n = +\infty$ nên $\lim n^2 = +\infty$.

Tương tự, với mọi số nguyên dương k , ta có $\lim n^k = +\infty$.

b) Quy tắc 2

Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ và $\lim v_n = L \neq 0$ thì $\lim(u_n v_n)$ được cho trong bảng sau :

$\lim u_n$	Dấu của L	$\lim(u_n v_n)$
$+\infty$	+	$+\infty$
$+\infty$	-	$-\infty$
$-\infty$	+	$-\infty$
$-\infty$	-	$+\infty$

Ví dụ 3. Tìm a) $\lim (3n^2 - 101n - 51)$; b) $\lim \frac{-5}{3n^2 - 101n - 51}$.

Giải

a) Ta có $3n^2 - 101n - 51 = n^2 \left(3 - \frac{101}{n} - \frac{51}{n^2} \right)$.

Vì $\lim n^2 = +\infty$ và $\lim \left(3 - \frac{101}{n} - \frac{51}{n^2} \right) = 3 > 0$ nên

$$\lim (3n^2 - 101n - 51) = +\infty.$$

b) Vì $\lim (3n^2 - 101n - 51) = +\infty$ nên

$$\lim \frac{-5}{3n^2 - 101n - 51} = -5 \lim \frac{1}{3n^2 - 101n - 51} = (-5).0 = 0. \quad \square$$

H1 *Tìm*

a) $\lim(n \sin n - 2n^3)$;

b) $\lim \frac{1}{n \sin n - 2n^3}$.

c) **Quy tắc 3**

Nếu $\lim u_n = L \neq 0$, $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ hoặc $v_n < 0$ kể từ

một số hạng nào đó trở đi thì $\lim \frac{u_n}{v_n}$ được cho trong bảng sau:

Dấu của L	Dấu của v_n	$\lim \frac{u_n}{v_n}$
+	+	$+\infty$
+	-	$-\infty$
-	+	$-\infty$
-	-	$+\infty$

Ví dụ 4. Tìm $\lim \frac{3n^3 + 2n - 1}{2n^2 - n}$.

Giải

Chia tử và mẫu của phân thức cho n^3 (n^3 là luỹ thừa bậc cao nhất của n trong tử và mẫu của phân thức), ta được

$$\frac{3n^3 + 2n - 1}{2n^2 - n} = \frac{3 + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}}{\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}.$$

Vì $\lim\left(3 + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right) = 3 > 0$, $\lim\left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right) = 0$ và $\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} > 0$ với mọi n nên

$$\lim \frac{3n^3 + 2n - 1}{2n^2 - n} = +\infty.$$

□

[H2] Tìm $\lim \frac{-2n^3 + n}{3n - 2}$.

Câu hỏi và bài tập

11. Tìm giới hạn của các dãy số (u_n) với

a) $u_n = -2n^3 + 3n + 5$;

b) $u_n = \sqrt{3n^4 + 5n^3 - 7n}$.

12. Tìm giới hạn của các dãy số (u_n) với

a) $u_n = \frac{-2n^3 + 3n - 2}{3n - 2}$;

b) $u_n = \frac{\sqrt[3]{n^6 - 7n^3 - 5n + 8}}{n + 12}$.

13. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim(2n + \cos n)$;

b) $\lim\left(\frac{1}{2}n^2 - 3\sin 2n + 5\right)$.

14. Chứng minh rằng nếu $q > 1$ thì $\lim q^n = +\infty$.

15. Tìm giới hạn của các dãy số (u_n) với

a) $u_n = \frac{3^n + 1}{2^n - 1}$;

b) $u_n = 2^n - 3^n$.

Luyện tập

16. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim \frac{n^2 + 4n - 5}{3n^3 + n^2 + 7}$;

c) $\lim \frac{\sqrt{2n^4 + 3n - 2}}{2n^2 - n + 3}$;

b) $\lim \frac{n^5 + n^4 - 3n - 2}{4n^3 + 6n^2 + 9}$;

d) $\lim \frac{3^n - 2.5^n}{7 + 3.5^n}$.

17. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim(3n^3 - 7n + 11)$;

c) $\lim \sqrt[3]{1 + 2n - n^3}$;

b) $\lim \sqrt{2n^4 - n^2 + n + 2}$;

d) $\lim \sqrt{2.3^n - n + 2}$.

18. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim(\sqrt{n^2 + n + 1} - n)$;

Hướng dẫn : Nhân và chia biểu thức đã cho với $\sqrt{n^2 + n + 1} + n$.

b) $\lim \frac{1}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}$;

Hướng dẫn : Nhân tử và mẫu của phân thức đã cho với $\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}$.

c) $\lim(\sqrt{n^2 + n + 2} - \sqrt{n+1})$;

d) $\lim \frac{1}{\sqrt{3n+2} - \sqrt{2n+1}}$;

e) $\lim(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})n$;

f) $\lim \frac{\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n+1}}{3n+2}$.

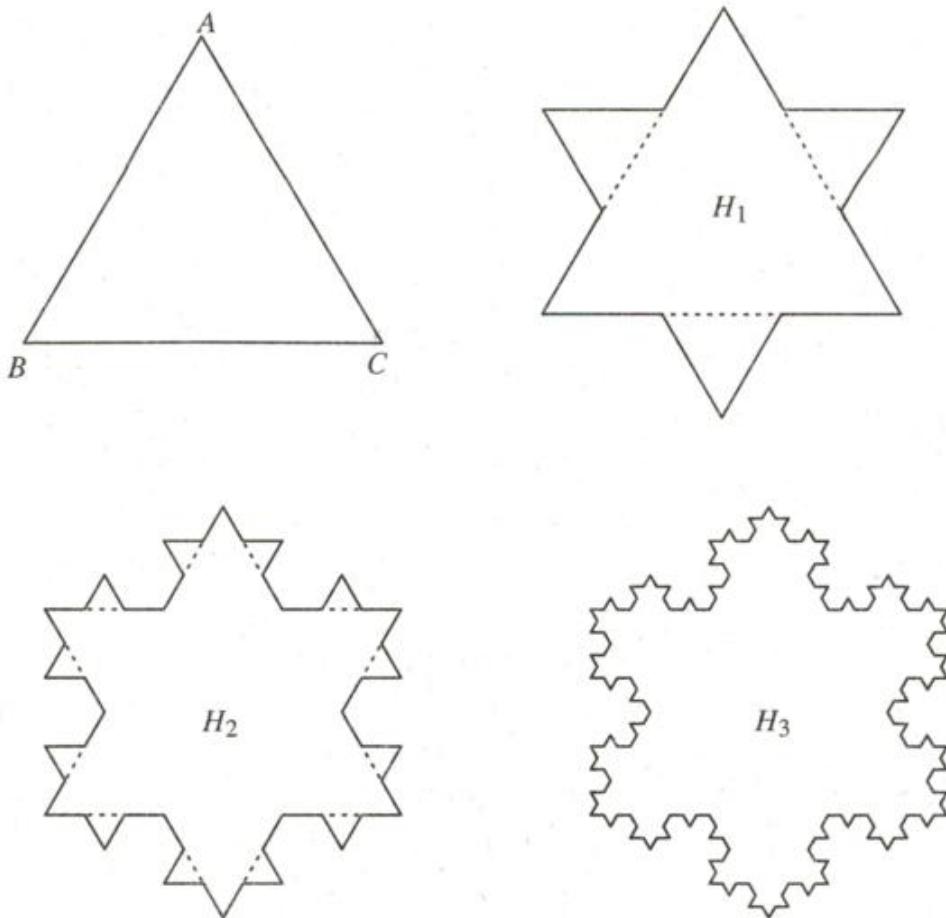
19. Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn là $\frac{5}{3}$, tổng ba số hạng đầu tiên của nó là $\frac{39}{25}$.

Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số đó.

20. Bóng tuyết Võn Kốc

Ta bắt đầu từ một tam giác đều ABC cạnh a . Chia mỗi cạnh của tam giác ABC thành ba đoạn thẳng bằng nhau. Trên mỗi đoạn thẳng ở giữa, dựng một tam giác đều nằm ngoài tam giác ABC rồi xoá đáy của nó, ta được đường gấp khúc khép kín H_1 . Chia mỗi cạnh của H_1 thành ba đoạn thẳng bằng nhau. Trên mỗi

đoạn thẳng ở giữa, dựng một tam giác đều nằm ngoài H_1 rồi xoá đáy của nó, ta được đường gấp khúc khép kín H_2 . Tiếp tục như vậy, ta được một hình giống như bông tuyết, gọi là *bông tuyết Võn Kốc*^(*) (h. 4.6).



Hình 4.6

- Gọi $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ là độ dài của $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$. Chứng minh rằng (p_n) là một cấp số nhân. Tính $\lim p_n$.
- Gọi S_n là diện tích của miền giới hạn bởi đường gấp khúc H_n . Tính S_n và tìm giới hạn của dãy số (S_n) .

Hướng dẫn : Số cạnh của H_n là $3 \cdot 4^n$. Tìm độ dài mỗi cạnh của H_n , từ đó tính p_n . Để tính S_n cần chú ý rằng muốn có H_{n+1} chỉ cần thêm vào một tam giác đều nhỏ trên mỗi cạnh của H_n .

(*) Helge von Koch (1879 – 1924) là một nhà toán học Thụy Điển. Tên của ông gắn liền với một ví dụ về một hình phẳng có chu vi vô cực và diện tích hữu hạn.



GIÔN UƠ-LIT – NGƯỜI SÁNG TẠO KÍ HIỆU ∞



John Wallis (1616 - 1703)

Từ rất sớm, nhà toán học Anh Giôn Uơ-lit (John Wallis) đã học tiếng Hi Lạp, tiếng La-tinh và tiếng Hê-brơ. Năm mươi lăm tuổi, ông bắt đầu say sưa học Toán.

Năm 24 tuổi, ông được phong linh mục và trở thành giáo sư Toán tại trường Ốc-xphốt (Oxford) ở Anh. Ông giảng dạy và nghiên cứu tại đó cho đến cuối đời.

Ông có công lớn vì đã phát hiện được thiên tài toán học của Niu-ton. Ông là người đầu tiên đã định nghĩa một cách chính xác luỹ thừa với các số mũ không, âm và hữu tỉ.

Ông còn là người sáng tạo ra kí hiệu ∞ để chỉ khái niệm vô cực.

B. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ. HÀM SỐ LIÊN TỤC