§ 2 DÃY SỐ

1. Định nghĩa và ví dụ

Ở các lớp dưới, qua việc giải bài tập, ta đã làm quen với khái niệm dãy số. Khi đó, nói tới dãy số ta hiểu đó là kết quả thu được khi viết liên tiếp các số theo một quy tắc nào đó. Chẳng hạn, khi viết liên tiếp các luỹ thừa với số mũ tự nhiên của $-\frac{1}{2}$, theo thứ tự tăng dần của số mũ, ta được dãy số :

$$\left(\frac{-1}{2}\right)^0, \left(\frac{-1}{2}\right)^1, \left(\frac{-1}{2}\right)^2, \left(\frac{-1}{2}\right)^3, \left(\frac{-1}{2}\right)^4, \left(\frac{-1}{2}\right)^5, \ldots \qquad (1)$$

Với mỗi số nguyên dương n, kí hiệu u_n là số nằm ở vị trí thứ n (kể từ trái qua phải) của dãy số (1), ta có

$$u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Điều đó cho thấy dãy số (1) thể hiện một quy tắc mà nhờ nó, ứng với mỗi số nguyên dương n, ta xác định được duy nhất một số thực u_n. Vì thế, ta có thể coi dãy số (1) là một hàm số xác định trên tập hợp các số nguyên dương.

ĐỊNH NGHĨA 1

Một hàm số u xác định trên tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một **dãy số vô hạn** (hay còn gọi tắt là **dãy số**).

Mỗi giá trị của hàm số u được gọi là một *số hạng* của dãy số ; $u(1)$ được gọi là *số hạng thứ nhất* (hay *số hạng đầu*) ; $u(2)$ được gọi là *số hạng thứ hai* ; ... .

Người ta thường kí hiệu các giá trị $u(1)$, $u(2)$, ... tương ứng bởi u_1 , u_2 , ...

Ví dụ 1. Hàm số $u(n) = \frac{1}{n+1}$, xác định trên tập $\mathbb{N}^*$, là một dãy số. Dãy số này có vô số số hạng :

$$u_1 = \frac{1}{2}\ ,\ u_2 = \frac{1}{3}\ ,\ u_3 = \frac{1}{4}\ , \dots .$$

H1 *Hãy xác định các số hạng thứ 9, thứ 99 và thứ 999 của dãy số ở ví dụ trên.*

Kí hiệu. Người ta thường kí hiệu dãy số $u = u(n)$ bởi (u_n), và gọi u_n là *số hạng tổng quát* của dãy số đó.

Người ta cũng thường viết dãy số (u_n) dưới *dạng khai triển* :

$$u_1\ , u_2\ , \dots , u_n\ , \dots .$$

Chẳng hạn, có thể kí hiệu dãy số ở ví dụ 1 bởi $\left(\frac{1}{n+1}\right)$; và khi viết dãy số đó dưới dạng khai triển ta được :

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots , \frac{1}{n+1}, \dots .$$

CHÚ Ý

Người ta cũng gọi một hàm số u xác định trên tập hợp gồm m số nguyên dương đầu tiên (m tuỳ ý thuộc $\mathbb{N}^*$) là một dãy số. Rõ ràng, dãy số trong trường hợp này chỉ có hữu hạn số hạng (m số hạng : u_1, u_2, ..., u_m) ; vì thế, người ta còn gọi nó là *dãy số hữu hạn* ; u_1 gọi là *số hạng đầu* và u_m gọi là *số hạng cuối*.

Ví dụ 2. Hàm số $u(n) = n^3$, xác định trên tập hợp $M = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$, là một dãy số hữu hạn. Dãy số này có năm số hạng :

n	1	2	3	4	5
u_n	1	8	27	64	125

1 là *số hạng đầu* và 125 là *số hạng cuối*.

Viết dãy số trên dưới dạng khai triển ta được :

$$1, 8,\ 27,\ 64,\ 125.$$

2. Các cách cho một dãy số

Một dãy số được coi là xác định nếu ta biết cách tìm mọi số hạng của dãy số đó. Từ đó, người ta thường cho dãy số bằng một trong các cách sau :

Cách 1 : *Cho dãy số bởi công thức của số hạng tổng quát.*

Chẳng hạn : "Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n-1}{3n+1}$".

H2 *Hãy tìm các số hạng u_{33} và u_{333} của dãy số vừa nêu trên.*

Cách 2 : *Cho dãy số bởi hệ thức truy hồi* (hay còn nói : *Cho dãy số bằng quy nạp*).

Ví dụ 3. Xét dãy số (u_n) xác định bởi : $u_1 = 1$ và với mọi $n \geq 2$

$$u_n = 2u_{n-1} + 1. \tag{2}$$

Rõ ràng, với cách cho như trên, ta có thể tìm được số hạng tuỳ ý của dãy số (u_n) :

– Do u_1 đã biết nên áp dụng (2) cho $n = 2$ ta tìm được u_2

$$u_2 = 2u_1 + 1 = 2 . 1 + 1 = 3 ;$$

– Vì biết u_2 nên áp dụng (2) cho $n = 3$ ta tìm được u_3

$$u_3 = 2u_2 + 1 = 2 . 3 + 1 = 7 ; \ \dots .$$

Tiếp tục quá trình trên ta sẽ tìm được số hạng tuỳ ý của dãy số (u_n).

Ví dụ 4. Xét dãy số (v_n) xác định bởi : $v_1 = -1$, $v_2 = 2$ và với mọi $n \geq 3$

$$v_n = v_{n-1} + 2v_{n-2}. \tag{3}$$

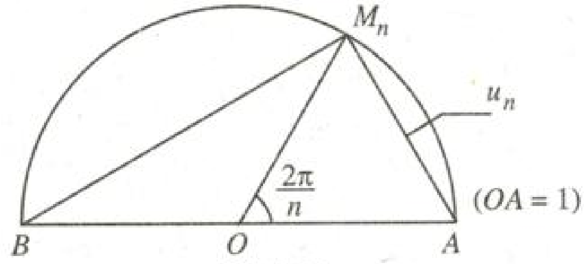
Phân tích tương tự như đối với dãy số (u_n) ở ví dụ 3, sẽ thấy : Với cách cho như trên, ta có thể tìm được số hạng tuỳ ý của dãy số (v_n).

H3 *Với (v_n) là dãy số cho ở ví dụ 4, hãy tìm v_4.*

Người ta nói các dãy số (u_n) và (v_n) ở ví dụ 3 và ví dụ 4 là những dãy số được cho bởi hệ thức truy hồi. Các hệ thức (2) và (3) gọi là *hệ thức truy hồi.*

Cách 3 : *Diễn đạt bằng lời cách xác định mỗi số hạng của dãy số.*

Ví dụ 5. Cho dãy số (u_n) với u_n là độ dài của dây cung AM_n trong hình 3.1.



Hình 3.1

CHÚ Ý

Một dãy số có thể cho bằng nhiều cách. Chẳng hạn, dãy số (u_n) ở ví dụ 3 có thể cho bởi công thức của số hạng tổng quát như sau :

$$u_n = 2^n - 1, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

H4 *Hãy tìm công thức của số hạng tổng quát của dãy số (u_n) ở ví dụ 5.*

3. Dãy số tăng, dãy số giảm

ĐỊNH NGHĨA 2

Dãy số (u_n) được gọi là **dãy số tăng** nếu với mọi n ta có $u_n < u_{n+1}$.

Dãy số (u_n) được gọi là **dãy số giảm** nếu với mọi n ta có $u_n > u_{n+1}$.

Ví dụ 6

a) Dãy số (u_n) với $u_n = n^2$ là một dãy số tăng, vì với mọi n ta luôn có

$$u_n = n^2 < (n+1)^2 = u_{n+1}.$$

b) Dãy số (u_n) ở ví dụ 1 là một dãy số giảm, vì với mọi n ta luôn có

$$u_n = \frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2} = u_{n+1}.$$

H5 *Hãy cho một ví dụ về dãy số tăng, một ví dụ về dãy số giảm và một ví dụ về dãy số không tăng cũng không giảm.*

4. Dãy số bị chặn

ĐỊNH NGHĨA 3

a) Dãy số (u_n) được gọi là **dãy số bị chặn trên** nếu tồn tại một số M sao cho

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \le M.$$

b) Dãy số (u_n) được gọi là **dãy số bị chặn dưới** nếu tồn tại một số m sao cho

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \ge m.$$

c) Dãy số (u_n) được gọi là **dãy số bị chặn** nếu nó vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới ; nghĩa là, tồn tại một số M và một số m sao cho

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad m \le u_n \le M.$$

Ví dụ 7

a) Dãy số (u_n) nói tới ở phần a) ví dụ 6 là dãy số bị chặn dưới, vì

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \geq 1.$$

Tuy nhiên, dãy số đó không bị chặn trên, vì không có số M để cho

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leq M.$$

b) Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$ là dãy số bị chặn, vì với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta luôn có

$$0 < \frac{2n-1}{n+1} = 2 - \frac{3}{n+1} < 2.$$

H6 *Hãy chọn những khẳng định đúng trong các khẳng định dưới đây :*

a) Mỗi hàm số là một dãy số.

b) Mỗi dãy số là một hàm số.

c) Mỗi dãy số tăng là một dãy số bị chặn dưới.

d) Mỗi dãy số giảm là một dãy số bị chặn trên.

e) Nếu (u_n) là một dãy số hữu hạn thì tồn tại các hằng số m và M, với $m \leq M$, sao cho tất cả các số hạng của (u_n) đều thuộc đoạn $[m ; M]$.

Câu hỏi và bài tập

9. Tìm 5 số hạng đầu của mỗi dãy số sau :

a) Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{2n^2 - 3}{n}$;

b) Dãy số (u_n) với $u_n = \sin^2 \dfrac{n\pi}{4} + \cos \dfrac{2n\pi}{3}$;

c) Dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n.\sqrt{4^n}$.

10. Tìm số hạng thứ 3 và số hạng thứ 5 của mỗi dãy số sau :

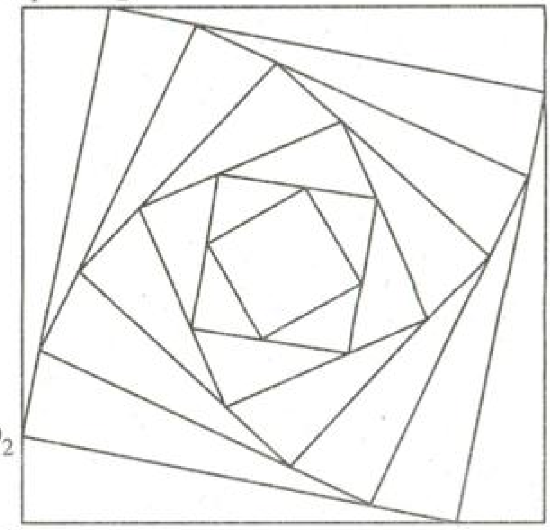
a) Dãy số (u_n) xác định bởi :

$$u_1 = 0 \text{ và } u_n = \frac{2}{u_{n-1}^2 + 1} \text{ với mọi } n \geq 2 ;$$

b) Dãy số (u_n) xác định bởi :

$$u_1 = 1,\ u_2 = -2 \text{ và } u_n = u_{n-1} - 2u_{n-2} \text{ với mọi } n \geq 3.$$

11. Cho hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng 6cm. Người ta dựng các hình vuông $A_2B_2C_2D_2$, $A_3B_3C_3D_3$, ..., $A_nB_nC_nD_n$, ... theo cách sau : Với mỗi $n = 2, 3, 4, ...$ lấy các điểm A_n, B_n, C_n và D_n tương ứng trên các cạnh $A_{n-1}B_{n-1}$, $B_{n-1}C_{n-1}$, $C_{n-1}D_{n-1}$ và $D_{n-1}A_{n-1}$ sao cho $A_{n-1}A_n = 1\text{cm}$ và $A_nB_nC_nD_n$ là một hình vuông (h. 3.2).



Hình 3.2

Xét dãy số (u_n) với u_n là độ dài cạnh của hình vuông $A_nB_nC_nD_n$.

Hãy cho dãy số (u_n) nói trên bởi hệ thức truy hồi.

12. Cho dãy số (u_n) xác định bởi :

$$u_1 = 1 \quad \text{và} \quad u_n = 2u_{n-1} + 3 \quad \text{với mọi } n \geq 2.$$

Bằng phương pháp quy nạp, chứng minh rằng với mọi $n \geq 1$ ta có $u_n = 2^{n+1} - 3$.

13. Hãy xét tính tăng, giảm của các dãy số sau :

a) Dãy số (u_n) với $u_n = n^3 - 3n^2 + 5n - 7$;

b) Dãy số (x_n) với $x_n = \dfrac{n+1}{3^n}$;

c) Dãy số (a_n) với $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Hướng dẫn :

a) Xét hiệu $u_{n+1} - u_n$.

b) Xét tỉ số $\dfrac{x_n}{x_{n+1}}$.

c) Viết lại công thức xác định a_n dưới dạng

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Tiếp theo, xét tỉ số $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$.

14. Chứng minh rằng dãy số (u_n) với

$$u_n = \frac{2n+3}{3n+2}$$

là một dãy số giảm và bị chặn.

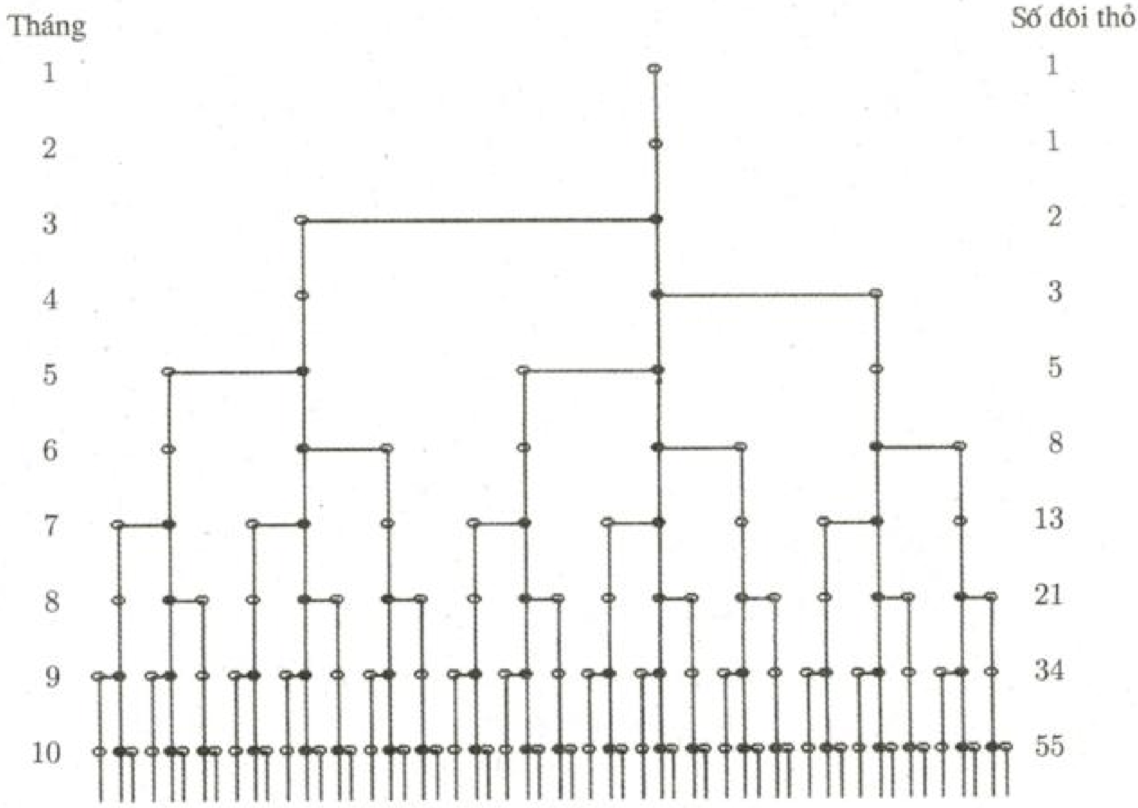
Bài đọc thêm

DÃY SỐ PHI-BÔ-NA-XI

Phi-bô-na-xi (Fibonacci) (còn có tên là Lê-ô-na-đô Đa Pi-da (Leonarda da Pisa)) là một nhà toán học nổi tiếng người I-ta-li-a. Trong cuốn sách Li-bơ A-ba-xi (Liber Abacci - Sách về toán đồ), do ông viết vào năm 1202, có bài toán sau :

"Một đôi thỏ (gồm một thỏ đực và một thỏ cái) cứ mỗi tháng đẻ được một đôi thỏ con (cũng gồm một thỏ đực và một thỏ cái) ; mỗi đôi thỏ con, khi tròn hai tháng tuổi, lại mỗi tháng đẻ ra một đôi thỏ con, và quá trình sinh nở cứ thế tiếp diễn. Hỏi sau một năm sẽ có tất cả bao nhiêu đôi thỏ, nếu đầu năm (tháng giêng) có một đôi thỏ sơ sinh ?"

Fibonacci (1170 - 1250)



"Gia đình nhà thỏ trong 10 tháng"

Rõ ràng ở tháng giêng, cũng như ở tháng 2, chỉ có một đôi thỏ. Sang tháng 3, đôi thỏ này sẽ đẻ ra một đôi thỏ con, vì thế ở tháng này sẽ có 2 đôi thỏ. Sang tháng 4, vì vẫn chỉ có đôi thỏ ban đầu sinh con nên ở tháng này sẽ có 3 đôi thỏ. Sang tháng 5, do có hai đôi thỏ (đôi thỏ ban đầu và đôi thỏ được sinh ra ở tháng 3) cùng sinh con nên ở tháng này sẽ có $3 + 2 = 5$ đôi thỏ ; ...

Một cách khái quát, nếu với mỗi số nguyên dương n, kí hiệu F_n là số đôi thỏ có ở tháng thứ n, thì với $n \geq 3$ ta có

$$F_n = F_{n-1} + \text{Số đôi thỏ được sinh ra ở tháng thứ } n.$$

Do các đôi thỏ được sinh ra ở tháng thứ $n - 1$ chưa thể đẻ con ở tháng thứ n, và ở tháng này mỗi đôi thỏ có ở tháng thứ $n - 2$ sẽ đẻ ra một đôi thỏ con nên số đôi thỏ được sinh ra ở tháng thứ n chính bằng F_{n-2}.

Như vậy, việc giải quyết bài toán nói trên của Phi-bô-na-xi dẫn ta tới việc khảo sát dãy số (F_n), xác định bởi

$$F_1 = 1,\ F_2 = 1 \text{ và } F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{với mọi } n \geq 3.$$

Dãy số trên sau này được nhà toán học Pháp E. Lu-ca (Edouard Lucas 1842 – 1891) gọi là *dãy số Phi-bô-na-xi*. Các số hạng của dãy số Phi-bô-na-xi được gọi là *các số Phi-bô-na-xi*.

Bằng phương pháp quy nạp toán học, người ta đã chứng minh được rằng

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)^n \quad \text{với mọi } n \geq 1,$$

trong đó α là nghiệm dương và β là nghiệm âm của phương trình $x^2 - x - 1 = 0$.

Dãy số Phi-bô-na-xi có rất nhiều tính chất đẹp, chẳng hạn :

1) $F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n-1}$ với mọi $n \geq 2$;

2) $F_1 + F_3 + F_5 + ... + F_{2n-1} = F_{2n}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$;

3) $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$;

... .

Dãy số Phi-bô-na-xi có liên quan mật thiết với nhiều vấn đề của toán học (số nguyên tố trong dãy số Phi-bô-na-xi, số vàng, hình chữ nhật vàng, số π, ...), vật lí học, ... Các số Phi-bô-na-xi có nhiều liên quan với tự nhiên và nghệ thuật (hội hoạ, âm nhạc, ...) ; chúng xuất hiện ở nhiều nơi trong thiên nhiên. Chẳng hạn, hầu hết các bông hoa có số cánh hoa là một trong các số $F_4, F_5, F_6, F_7, F_8, F_9, F_{10}, F_{11}$: hoa loa kèn có 3 cánh, hoa mao lương vàng có 5 cánh, hoa phi yến có 8 cánh, hoa cúc vạn thọ có 13 cánh, hoa cúc tây có 21 cánh, hoa cúc thường có 34, 55 hoặc 89 cánh, ...

Luyện tập

15. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 3 \quad \text{và} \quad u_{n+1} = u_n + 5 \text{ với mọi } n \geq 1.$$

a) Hãy tính u_2, u_4 và u_6.

b) Chứng minh rằng $u_n = 5n - 2$ với mọi $n \geq 1$.

16. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 1 \quad \text{và} \quad u_{n+1} = u_n + (n+1).2^n \quad \text{với mọi } n \geq 1.$$

a) Chứng minh rằng (u_n) là một dãy số tăng.

b) Chứng minh rằng

$$u_n = 1 + (n-1).\,2^n$$

với mọi $n \geq 1$.

17. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 1 \quad \text{và} \quad u_{n+1} = \frac{2}{u_n^2 + 1} \quad \text{với mọi } n \geq 1.$$

Chứng minh rằng (u_n) là một *dãy số không đổi* (dãy số có tất cả các số hạng đều bằng nhau).

18. Cho dãy số (s_n) với $s_n = \sin\,(4n-1)\dfrac{\pi}{6}\cdot$

a) Chứng minh rằng $s_n = s_{n+3}$ với mọi $n \geq 1$.

b) Hãy tính tổng 15 số hạng đầu tiên của dãy số đã cho.