§ 4 ĐỊNH NGHĨA VÀ MỘT SỐ ĐỊNH LÍ VỀ GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

1. Giới hạn của hàm số tại một điểm

a) Giới hạn hữu hạn

Xét bài toán sau :

Cho hàm số $f(x) = \dfrac{2x^2 - 8}{x - 2}$ *và một dãy bất kì* $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ *những số thực khác* 2 (*tức là* $x_n \neq 2$ *với mọi* n) *sao cho* $\lim x_n = 2$. (1)

Hãy xác định dãy các giá trị tương ứng $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), ...$ *của hàm số và tìm* $\lim f(x_n)$.

Vì $x_n \neq 2$ nên

$$f(x_n) = \frac{2(x_n^2 - 4)}{x_n - 2} = 2(x_n + 2) \text{ với mọi } n.$$

Do đó

$$f(x_1) = 2(x_1 + 2),\ \ f(x_2) = 2(x_2 + 2),\ \ldots,\ \ f(x_n) = 2(x_n + 2),\ \ldots .$$

Từ (1) suy ra

$$\lim f(x_n) = \lim 2(x_n + 2) = 2(\lim x_n + 2) = 2(2 + 2) = 8.$$

Ta nói rằng hàm số f có giới hạn là 8 khi x dần đến 2.

Một cách tổng quát, ta có

ĐỊNH NGHĨA 1

Giả sử $(a\ ;\ b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 và f là một hàm số xác định trên tập hợp $(a\ ;\ b)\setminus\{x_0\}$. Ta nói rằng hàm số f có giới hạn là số thực L khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy số (x_n) trong tập hợp $(a\ ;\ b)\setminus\{x_0\}$ (tức là $x_n \in (a\ ;\ b)$ và $x_n \neq x_0$ với mọi n) mà $\lim x_n = x_0$, ta đều có $\lim f(x_n) = L$.

Khi đó ta viết

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \text{ hoặc } f(x) \to L \text{ khi } x \to x_0.$$

Ví dụ 1. Tìm $\lim\limits_{x \to 0}\left(x\cos\frac{1}{x}\right)$.

Giải

Xét hàm số $f(x) = x\cos\frac{1}{x}$. Với mọi dãy số (x_n) mà $x_n \neq 0$ với mọi n và $\lim x_n = 0$, ta có $f(x_n) = x_n\cos\frac{1}{x_n}$. Vì

$$|f(x_n)| = |x_n|\left|\cos\frac{1}{x_n}\right| \leq |x_n| \text{ và } \lim|x_n| = 0$$

nên $\lim f(x_n) = 0$. Do đó

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0}\left(x\cos\frac{1}{x}\right) = 0. \qquad \square$$

H1 *Tìm* $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$.

Nhận xét. Áp dụng định nghĩa 1, dễ dàng chứng minh được rằng :

a) Nếu $f(x) = c$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, trong đó c là một hằng số, thì với mọi $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} c = c.$$

b) Nếu $g(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì với mọi $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} x = x_0.$$

b) Giới hạn vô cực

Giới hạn vô cực của hàm số tại một điểm được định nghĩa tương tự như giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm. Chẳng hạn, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ có nghĩa là với mọi dãy (x_n) trong tập hợp $(a\,;b) \setminus \{x_0\}$ mà $\lim x_n = x_0$, ta đều có $\lim f(x_n) = +\infty$.

Ví dụ 2. Tìm $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3}{(x-1)^2}$.

Giải. Xét hàm số $f(x) = \dfrac{3}{(x-1)^2}$. Với mọi dãy số (x_n) mà $x_n \neq 1$ với mọi n và $\lim x_n = 1$, ta có $f(x_n) = \dfrac{3}{(x_n - 1)^2}$. Vì $\lim 3 = 3 > 0$, $\lim(x_n - 1)^2 = 0$ và $(x_n - 1)^2 > 0$ với mọi n nên $\lim f(x_n) = +\infty$. Do đó

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{3}{(x-1)^2} = +\infty. \qquad \square$$

2. Giới hạn của hàm số tại vô cực

Giới hạn của hàm số tại vô cực (khi x dần đến $+\infty$ hoặc $-\infty$) được định nghĩa tương tự như giới hạn của hàm số tại một điểm.

ĐỊNH NGHĨA 2

• Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(a\ ;\ +\infty)$. Ta nói rằng hàm số f có giới hạn là số thực L khi x dần đến $+\infty$ nếu với mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(a\ ;\ +\infty)$ (tức là $x_n > a$ với mọi n) mà $\lim x_n = +\infty$, ta đều có

$$\lim f(x_n) = L.$$

Khi đó ta viết

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \text{ hoặc } f(x) \to L \text{ khi } x \to +\infty.$$

• Các giới hạn

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ được định nghĩa tương tự.

Ví dụ 3

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, vì với mọi dãy số âm (x_n) mà $\lim x_n = -\infty$, ta đều có $\lim \dfrac{1}{x_n} = 0$.

b) Tương tự, ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. □

Nhận xét

Áp dụng định nghĩa giới hạn của hàm số, có thể chứng minh được rằng :

Với mọi số nguyên dương k, ta có

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k = +\infty$; b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty \text{ nếu } k \text{ chẵn} \\ -\infty \text{ nếu } k \text{ lẻ} \end{cases}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^k} = 0$; d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^k} = 0$.

3. Một số định lí về giới hạn hữu hạn

Áp dụng các định lí về giới hạn của dãy số, có thể chứng minh được các định lí sau đây về giới hạn của hàm số.

ĐỊNH LÍ 1

Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$ ($L, M \in \mathbb{R}$). Khi đó

a) $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) + g(x)\right] = L + M$;

b) $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) - g(x)\right] = L - M$;

c) $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x)g(x)\right] = LM$;

Đặc biệt, nếu c là một hằng số thì $\lim\limits_{x \to x_0} \left[c\, f(x)\right] = cL$;

d) Nếu $M \neq 0$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$.

Để dễ nhớ, ta nói

Giới hạn của tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số tại một điểm bằng tổng, hiệu, tích, thương các giới hạn của chúng tại điểm đó (trong trường hợp thương, giới hạn của mẫu phải khác không).

Định lí 1 vừa nêu và định lí 2 tiếp theo vẫn đúng khi thay $x \to x_0$ bởi $x \to +\infty$ hoặc $x \to -\infty$.

Nhận xét

Nếu k là một số nguyên dương và a là một hằng số thì với mọi $x_0 \in \mathbb{R}$, ta có

$$\lim_{x \to x_0} ax^k = \lim_{x \to x_0} a.\underbrace{\lim_{x \to x_0} x.\lim_{x \to x_0} x \ldots \lim_{x \to x_0} x}_{k \text{ thừa số}} = a(\lim_{x \to x_0} x)^k = ax_0^k.$$

Ví dụ 4. Tìm

a) $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 5x^2 + 7)$;

b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^3 + x^2}$.

Giải

a) Ta có $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 5x^2 + 7) = \lim\limits_{x \to 2} x^3 - \lim\limits_{x \to 2} (5x^2) + \lim\limits_{x \to 2} 7$

$$= 2^3 - 5 \,.\, 2^2 + 7 = -5.$$

b) Với $x \neq -1$, ta có $\dfrac{x^2 - x - 2}{x^3 + x^2} = \dfrac{(x+1)(x-2)}{x^2(x+1)} = \dfrac{x-2}{x^2}$.

Do đó

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + x^2} = \lim_{x \to -1} \frac{x-2}{x^2} = -3. \qquad \square$$

H2 *Tìm* $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^2 - x + 1}{x^2 + 2x}$.

Ví dụ 5. Tìm $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - x + 10}{x^3 + 3x - 3}$.

Giải

Chia tử và mẫu của phân thức cho x^3 (x^3 là luỹ thừa bậc cao nhất của x trong tử và mẫu của phân thức), ta được

$$\frac{2x^2 - x + 10}{x^3 + 3x - 3} = \frac{\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{10}{x^3}}{1 + \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{3}{x^3}} \text{ với mọi } x \neq 0.$$

Vì $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{10}{x^3} \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} - \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} + \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{10}{x^3}$

$$= 2 \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} - \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} + 10 \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3}$$

$$= 2 \,.\, 0 - 0 + 10 \,.\, 0 = 0,$$

và $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{3}{x^3} \right) = 1$ nên theo định lí 1. d), ta có

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - x + 10}{x^3 + 3x - 3} = \frac{0}{1} = 0. \qquad \square$$

H3 *Tìm* $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^4 - x^3 + x}{x^4 + 2x^2 - 7}$.

ĐỊNH LÍ 2

Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$. Khi đó

a) $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |L|$;

b) $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{L}$;

c) Nếu $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in J \setminus \{x_0\}$, trong đó J là một khoảng nào đó chứa x_0, thì $L \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

Ví dụ 6. Tìm $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{\dfrac{2x^4 - x^3 + x}{x^4 + 2x^2 - 7}}$.

Giải

Vì $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^4 - x^3 + x}{x^4 + 2x^2 - 7} = 2$ nên $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{\dfrac{2x^4 - x^3 + x}{x^4 + 2x^2 - 7}} = \sqrt{2}$. □

H4 *Tìm* $\lim\limits_{x \to -1} |x^3 + 7x|$ *và* $\lim\limits_{x \to -1} \sqrt[3]{x^3 + 7x}$.

Câu hỏi và bài tập

21. Áp dụng định nghĩa giới hạn của hàm số, tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x + 1}$;

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{\sqrt{5 - x}}$.

22. Cho hàm số $f(x) = \cos\dfrac{1}{x}$ và hai dãy số (x'_n), (x''_n) với

$$x'_n = \frac{1}{2n\pi}, \qquad x''_n = \frac{1}{(2n+1)\dfrac{\pi}{2}}.$$

a) Tìm giới hạn của các dãy số (x'_n), (x''_n), $(f(x'_n))$ và $(f(x''_n))$.

b) Tồn tại hay không $\lim\limits_{x \to 0} \cos\dfrac{1}{x}$?

23. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x \to 2}(3x^2 + 7x + 11)$;

b) $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{x - x^3}{(2x - 1)(x^4 - 3)}$;

c) $\lim\limits_{x \to 0} x\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$;

d) $\lim\limits_{x \to 9}\dfrac{\sqrt{x} - 3}{9x - x^2}$;

e) $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}}\left|x^2 - 4\right|$;

f) $\lim\limits_{x \to 2}\sqrt{\dfrac{x^4 + 3x - 1}{2x^2 - 1}}$.

24. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x \to -\infty}\dfrac{3x^2 - x + 7}{2x^3 - 1}$;

b) $\lim\limits_{x \to -\infty}\dfrac{2x^4 + 7x^3 - 15}{x^4 + 1}$;

c) $\lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^6 + 2}}{3x^3 - 1}$;

d) $\lim\limits_{x \to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^6 + 2}}{3x^3 - 1}$.

25. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x \to -\infty}\sqrt[3]{\dfrac{x^2 + 2x}{8x^2 - x + 3}}$;

b) $\lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{x\sqrt{x}}{x^2 - x + 2}$.

Bài đọc thêm

CÁC ĐỊNH LÍ KẸP VÀ ĐỊNH LÍ VỀ ĐIỀU KIỆN TỒN TẠI GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ TĂNG HOẶC GIẢM

Trong bài này ta sẽ đề cập đến một vài định lí quan trọng trong lí thuyết giới hạn, được sử dụng nhiều trong lí thuyết cũng như trong thực hành.

1. Các định lí kẹp

Ta nhắc lại một định lí ở đầu chương : Cho hai dãy số (u_n) và (v_n). Nếu $|u_n| \le v_n$ với mọi n và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.

Đó là một trường hợp riêng của định lí sau :

Định lí 1 (Định lí kẹp về giới hạn của dãy số)

Cho ba dãy số (u_n), (v_n) và (w_n). Nếu

$$u_n \le v_n \le w_n \text{ với mọi } n \qquad (1)$$

và $\lim u_n = \lim w_n = L \quad (L \in \mathbb{R})$ thì $\lim v_n = L$.

Chứng minh. Từ (1) suy ra

$$0 \le v_n - u_n \le w_n - u_n \text{ với mọi } n.$$

Vì $\lim(w_n - u_n) = \lim w_n - \lim u_n = L - L = 0$ nên $\lim(v_n - u_n) = 0$.

Do đó $\lim v_n = \lim\left[(v_n - u_n) + u_n\right] = \lim(v_n - u_n) + \lim u_n = 0 + L = L$.

Ví dụ. Tìm giới hạn của dãy số (u_n) với

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

Giải. Với mỗi số nguyên k mà $1 \le k \le n$, ta có

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Do đó

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le u_n \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \quad \text{với mọi } n.$$

Dễ thấy $\lim \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$, do đó $\lim u_n = 1$. □

Từ định lí 1 và định nghĩa giới hạn của hàm số ta suy ra

Định lí 2 (Định lí kẹp về giới hạn của hàm số)

Giả sử J là một khoảng chứa x_0 và f, g, h là ba hàm số xác định trên tập hợp $J \setminus \{x_0\}$. Nếu $f(x) \le g(x) \le h(x)$ với mọi $x \in J \setminus \{x_0\}$ và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L$.

Áp dụng định lí 2, người ta chứng minh được định lí sau :

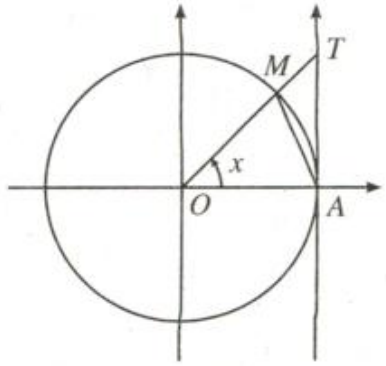
Định lí 3

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Chứng minh

Vì $x \ne 0$ nên ta chỉ cần xét x trong một khoảng nào đó chứa điểm 0, chẳng hạn $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ và $x \ne 0$.

• Trước hết giả sử $x \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$. Trên đường tròn lượng giác, ta đặt cung $\overset{\frown}{AM}$ có số đo bằng x rad. Tia OM cắt trục tang tại điểm T (h.4.7). Ta có diện tích $\Delta\, OAM$ < diện tích hình quạt OAM < diện tích $\Delta\, OAT$, tức là



Hình 4.7

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x.$$

Vì $x \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$ nên $\sin x > 0$; do đó chia các vế của các bất đẳng thức trên cho $\frac{1}{2}\sin x$, ta được

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}. \qquad (1)$$

Vì $\cos x > 0$ với $x \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$ nên từ (1) suy ra

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \qquad (2)$$

Nếu $x \in \left(-\frac{\pi}{2} ; 0\right)$ thì $-x \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$; áp dụng công thức (2) với $(-x)$, ta được

$$\cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{-x} < 1, \text{ hay } \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Vậy với mọi $x \in \left(-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right)$ và $x \neq 0$ ta luôn luôn có (2).

Dễ thấy $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1$. Theo định lí 2, từ (2)

suy ra $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. □

2. Điều kiện để một dãy số tăng hoặc giảm có giới hạn hữu hạn

Ta thừa nhận định lí sau :

Định lí 4

a) Dãy số tăng và bị chặn trên thì có giới hạn hữu hạn.

b) Dãy số giảm và bị chặn dưới thì có giới hạn hữu hạn.

Áp dụng định lí 4, người ta chứng minh được sự tồn tại giới hạn hữu hạn của nhiều dãy số. Ở đây ta chỉ nêu một ví dụ quan trọng. Xét dãy số (u_n) với

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Dùng máy tính bỏ túi, ta tính được các giá trị gần đúng của các số hạng của nó :

2 ; $2{,}25$; $2{,}37037037$; $2{,}44140625$; $2{,}48832$; . . . ; $u_{1000} \approx 2{,}71692393$; . . . ;

$u_{10000} \approx 2{,}71814593$; . . . .

Người ta chứng minh được rằng đây là một dãy số tăng và bị chặn trên (chẳng hạn bởi số 3). Theo định lí 4, dãy số này có giới hạn hữu hạn. Giới hạn đó được kí hiệu là e, tức là

$$e = \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Cũng như số π, số e có một vai trò quan trọng trong toán học. Người ta đã chứng minh được rằng nó là một số vô tỉ và có giá trị là

$$e = 2{,}718281828459...$$