§ 5 GIỚI HẠN MỘT BÊN

Trong định nghĩa $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, ta giả thiết hàm số f xác định trên tập hợp $(a ; b) \setminus \{x_0\}$, trong đó $(a ; b)$ là một khoảng chứa điểm x_0. Như vậy, các giá trị được xét của x là các giá trị gần x_0, bao gồm cả các giá trị lớn hơn lẫn nhỏ hơn x_0. Khái niệm giới hạn một bên xuất hiện khi ta chỉ xét các giá trị của hàm số với $x > x_0$ hoặc chỉ xét các giá trị của hàm số với $x < x_0$.

1. Giới hạn hữu hạn

ĐỊNH NGHĨA 1

Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(x_0 ; b)$ $(x_0 \in \mathbb{R})$. Ta nói rằng hàm số f có **giới hạn bên phải** là số thực L khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(x_0 ; b)$ mà $\lim x_n = x_0$, ta đều có $\lim f(x_n) = L$.
Khi đó ta viết

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \text{ hoặc } f(x) \to L \text{ khi } x \to x_0^+.$$

Định nghĩa giới hạn bên trái của hàm số được phát biểu tương tự.

ĐỊNH NGHĨA 2

Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(a\ ;\ x_0)$ $(x_0 \in \mathbb{R})$. Ta nói rằng hàm số f có **giới hạn bên trái** là số thực L khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(a\ ;\ x_0)$ mà $\lim x_n = x_0$, ta đều có $\lim f(x_n) = L$.

Khi đó ta viết

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \quad \text{hoặc } f(x) \to L \text{ khi } x \to x_0^-.$$

Nhận xét

1) Hiển nhiên nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ thì hàm số f có giới hạn bên phải và giới hạn bên trái tại điểm x_0 và $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$.

2) Ta thừa nhận điều ngược lại cũng đúng, nghĩa là

Nếu $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$ thì hàm số f có giới hạn tại điểm x_0 và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

3) Các định lí 1 và định lí 2 trong §4 vẫn đúng khi thay $x \to x_0$ bởi $x \to {x_0}^-$ hoặc $x \to {x_0}^+$.

Ví dụ 1. Gọi d là hàm dấu

$$d(x) = \begin{cases} -1 \text{ với } x < 0, \\ \ \ 0 \text{ với } x = 0, \\ \ \ 1 \text{ với } x > 0. \end{cases}$$

Tìm $\lim\limits_{x \to 0^-} d(x)$, $\lim\limits_{x \to 0^+} d(x)$ và $\lim\limits_{x \to 0} d(x)$ (nếu có).

Giải

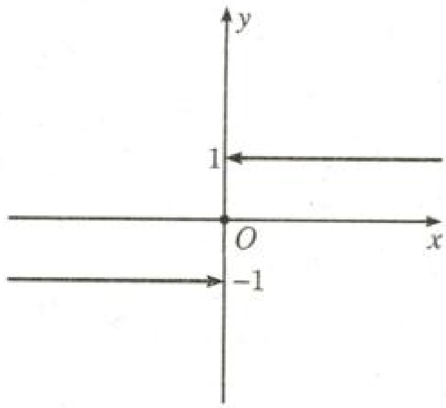
Với $x < 0$, ta có $d(x) = -1$. Do đó

$$\lim_{x \to 0^-} d(x) = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1.$$

Tương tự, ta có

$$\lim_{x\to 0^+} d(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1.$$

Vì $\lim\limits_{x\to 0^-} d(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} d(x)$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to 0} d(x)$ (h. 4.8). □



Hình 4.8

H1 *Tìm giới hạn bên phải, giới hạn bên trái và giới hạn (nếu có) của hàm số*

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{với } x < -1, \\ 2x^2 - 3 & \text{với } x \geq -1 \end{cases}$$

khi x dần đến -1.

2. Giới hạn vô cực

1) Các định nghĩa $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$ được phát biểu tương tự như định nghĩa 1 và định nghĩa 2.

2) Nhận xét 1 và nhận xét 2 vẫn đúng đối với giới hạn vô cực.

Ví dụ 2

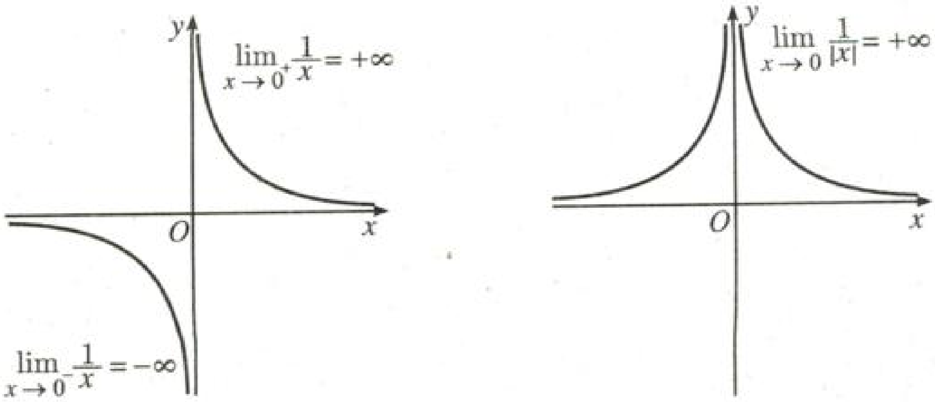
a) Từ định nghĩa giới hạn bên trái và giới hạn bên phải của hàm số, ta có

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \text{ và } \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Vì $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} \neq \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ (h. 4.9a).

b) Dễ dàng thấy rằng $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$. Do đó

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{|x|} = +\infty \text{ và } \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{|x|} = +\infty \text{ (h. 4.9b).}$$ □



a) b)

Hình 4.9

H2 *Tìm* $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$.

Câu hỏi và bài tập

26. Áp dụng định nghĩa giới hạn bên phải và giới hạn bên trái của hàm số, tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{x-1}$;

b) $\lim\limits_{x \to 5^-} \left(\sqrt{5-x} + 2x\right)$;

c) $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1}{x-3}$;

d) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1}{x-3}$.

27. Tìm các giới hạn sau (nếu có) :

a) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{|x-2|}{x-2}$;

b) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{|x-2|}{x-2}$;

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{|x-2|}{x-2}$.

28. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x + 2\sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}$;

b) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{4 - x^2}{\sqrt{2-x}}$;

c) $\lim\limits_{x \to (-1)^+} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{\sqrt{x^5 + x^4}}$;

d) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{\sqrt{x^2 - 7x + 12}}{\sqrt{9 - x^2}}$.

29. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 2|x| - 1 & \text{với } x \le -2, \\ \sqrt{2x^2 + 1} & \text{với } x > -2. \end{cases}$$

Tìm $\lim\limits_{x \to (-2)^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to (-2)^+} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ (nếu có).

Luyện tập

30. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} |x^2 - 8|$;

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x}$;

c) $\lim\limits_{x \to -1} \sqrt{\dfrac{x^3}{x^2 - 3}}$;

d) $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt[3]{\dfrac{2x(x+1)}{x^2 - 6}}$;

e) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sqrt{1 - x^3} - 3x}{2x^2 + x - 3}$;

f) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2|x+1| - 5\sqrt{x^2 - 3}}{2x + 3}$.

31. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x \to -\sqrt{2}} \dfrac{x^3 + 2\sqrt{2}}{x^2 - 2}$;

b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^4 - 27x}{2x^2 - 3x - 9}$;

c) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^4 - 16}{x^2 + 6x + 8}$;

d) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{\sqrt{1 - x} + x - 1}{\sqrt{x^2 - x^3}}$.

32. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{\dfrac{2x^5 + x^3 - 1}{(2x^2 - 1)(x^3 + x)}}$;

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2|x| + 3}{\sqrt{x^2 + x + 5}}$;

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + x} + 2x}{2x + 3}$;

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + 1)\sqrt{\dfrac{x}{2x^4 + x^2 + 1}}$.

33. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{với } x \le 2, \\ 4x - 3 & \text{với } x > 2. \end{cases}$$

Tìm $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ (nếu có).