A. TỔ HỢP

§ 1 HAI QUY TẮC ĐẾM CƠ BẢN

Bài toán đếm số phần tử của một tập hợp xuất hiện khá phổ biến trong khoa học cũng như trong cuộc sống. Nếu số phần tử của một tập hợp không nhiều thì ta có thể đếm trực tiếp được số phần tử của nó bằng cách liệt kê. Tuy nhiên, nếu số phần tử của một tập hợp rất lớn thì cách đếm trực tiếp là không khả thi.

Bài toán mở đầu

Mỗi người sử dụng mạng máy tính đều có mật khẩu. Giả sử mỗi mật khẩu gồm 6 kí tự, mỗi kí tự hoặc là một chữ số (trong 10 chữ số từ 0 đến 9) hoặc là một chữ cái (trong bảng 26 chữ cái tiếng Anh) và mật khẩu phải có ít nhất là một chữ số. Hỏi có thể lập được tất cả bao nhiêu mật khẩu ?

H1 *Hãy viết một mật khẩu. Có thể liệt kê hết các mật khẩu được không ? Hãy ước đoán thử xem có khoảng bao nhiêu mật khẩu ?*

Bài này sẽ cung cấp cho chúng ta hai quy tắc đếm cơ bản nhờ đó có thể tính chính xác số phần tử của một tập hợp mà không cần đếm trực tiếp.

1. Quy tắc cộng

Ví dụ 1. Một trường THPT được cử một học sinh đi dự trại hè toàn quốc. Nhà trường quyết định chọn một học sinh tiên tiến trong lớp 11A hoặc lớp 12B. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn, nếu biết rằng lớp 11A có 31 học sinh tiên tiến và lớp 12B có 22 học sinh tiên tiến ?

Giải

Nhà trường có hai phương án chọn. Phương án thứ nhất là chọn một học sinh tiên tiến của lớp 11A, phương án này có 31 cách chọn. Phương án thứ hai là chọn một học sinh tiên tiến của lớp 12B, phương án hai này có 22 cách chọn. Vậy nhà trường có cả thảy

$$31 + 22 = 53 \text{ cách chọn.}$$ □

Ta có quy tắc đếm sau đây gọi là **quy tắc cộng**.

> Giả sử một công việc có thể được thực hiện theo phương án A hoặc phương án B. Có n cách thực hiện phương án A và m cách thực hiện phương án B. Khi đó công việc có thể được thực hiện bởi $n + m$ cách.

Quy tắc cộng cho công việc với nhiều phương án được phát biểu như sau :

> Giả sử một công việc có thể được thực hiện theo một trong k phương án $A_1, A_2, ..., A_k$. Có n_1 cách thực hiện phương án A_1, n_2 cách thực hiện phương án A_2,... và n_k cách thực hiện phương án A_k. Khi đó công việc có thể được thực hiện bởi $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ cách.

Ví dụ 2. Giả sử từ tỉnh A đến tỉnh B có thể đi bằng các phương tiện : ô tô, tàu hoả, tàu thuỷ hoặc máy bay. Mỗi ngày có 10 chuyến ô tô, 5 chuyến tàu hoả, 3 chuyến tàu thuỷ và 2 chuyến máy bay. Theo quy tắc cộng, ta có $10 + 5 + 3 + 2 = 20$ sự lựa chọn để đi từ tỉnh A đến B. □

H2 *Trong một cuộc thi tìm hiểu về đất nước Việt Nam, ban tổ chức công bố danh sách các đề tài bao gồm : 8 đề tài về lịch sử, 7 đề tài về thiên nhiên, 10 đề tài về con người và 6 đề tài về văn hoá. Mỗi thí sinh được quyền chọn một đề tài. Hỏi mỗi thí sinh có bao nhiêu khả năng lựa chọn đề tài ?*

CHÚ Ý

Số phần tử của tập hợp hữu hạn X được kí hiệu là $|X|$ (hoặc $n(X)$).

Quy tắc cộng có thể được phát biểu dưới dạng sau :

Nếu A và B là hai tập hợp hữu hạn không giao nhau thì số phần tử của $A \cup B$ bằng số phần tử của A cộng với số phần tử của B, tức là

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

2. Quy tắc nhân

Ví dụ 3. An muốn qua nhà Bình để cùng Bình đến chơi nhà Cường. Từ nhà An đến nhà Bình có 4 con đường đi, từ nhà Bình tới nhà Cường có 6 con đường đi (hình 2.1). Hỏi An có bao nhiêu cách chọn đường đi đến nhà Cường ?

Hình 2.1

Giải

Với mỗi cách đi từ nhà An đến nhà Bình sẽ có 6 cách đi tiếp từ nhà Bình đến nhà Cường. Vì có 4 cách đi từ nhà An đến Bình nên có cả thảy 4 . 6 = 24 cách đi từ nhà An qua nhà Bình đến nhà Cường. □

Ta có quy tắc đếm sau đây gọi là **quy tắc nhân**.

> Giả sử một công việc nào đó bao gồm hai công đoạn A và B. Công đoạn A có thể làm theo n cách. Với mỗi cách thực hiện công đoạn A thì công đoạn B có thể làm theo m cách. Khi đó công việc có thể thực hiện theo nm cách.

H3 *Nhãn mỗi chiếc ghế trong một hội trường gồm hai phần : phần đầu là một chữ cái (trong bảng 24 chữ cái tiếng Việt), phần thứ hai là một số nguyên dương nhỏ hơn 26. Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu chiếc ghế được ghi nhãn khác nhau ?*

Quy tắc nhân cho công việc với nhiều công đoạn được phát biểu như sau :

> Giả sử một công việc nào đó bao gồm k công đoạn $A_1, A_2, ..., A_k$. Công đoạn A_1 có thể thực hiện theo n_1 cách, công đoạn A_2 có thể thực hiện theo n_2 cách, ..., công đoạn A_k có thể thực hiện theo n_k cách. Khi đó công việc có thể thực hiện theo $n_1 n_2 \ldots n_k$ cách.

Ví dụ 4. Biển số xe máy của tỉnh A (nếu không kể mã số tỉnh) có 6 kí tự, trong đó kí tự ở vị trí đầu tiên là một chữ cái (trong bảng 26 chữ cái tiếng Anh), kí tự ở vị trí thứ hai là một chữ số thuộc tập $\{1, 2, ..., 9\}$, mỗi kí tự ở bốn vị trí tiếp theo là một chữ số thuộc tập $\{0, 1, ..., 9\}$. Hỏi nếu chỉ dùng một mã số tỉnh thì tỉnh A có thể làm được nhiều nhất bao nhiêu biển số xe máy khác nhau ?

Giải

Ta có 26 cách chọn chữ cái để xếp ở vị trí đầu tiên. Tương tự có 9 cách chọn chữ số cho vị trí thứ hai và có 10 cách chọn chữ số cho mỗi vị trí trong bốn vị trí còn lại. Theo quy tắc nhân, ta có tất cả

$$26 \,.\, 9 \,.\, 10 \,.\, 10 \,.\, 10 \,.\, 10 = 2\,340\,000 \text{ (biển số xe).}$$ □

Ví dụ 5. Trở lại bài toán mở đầu. Hãy tính xem :

a) Có bao nhiêu dãy gồm 6 kí tự, mỗi kí tự hoặc là một chữ cái (trong bảng 26 chữ cái) hoặc là một chữ số (trong 10 chữ số từ 0 đến 9) ?

b) Có bao nhiêu dãy gồm 6 kí tự nói ở câu a) không phải là mật khẩu ?

c) Có thể lập được nhiều nhất bao nhiêu mật khẩu ?

Giải

a) Vì mỗi kí tự có $26 + 10 = 36$ cách chọn nên theo quy tắc nhân, ta có thể lập được 36^6 dãy gồm 6 kí tự như vậy.

b) Dãy gồm 6 kí tự không phải là một mật khẩu nếu tất cả 6 kí tự đều là chữ cái. Vì mỗi kí tự có 26 cách chọn nên theo quy tắc nhân, số dãy gồm 6 kí tự không phải là một mật khẩu là 26^6.

c) Vậy có $36^6 - 26^6 = 1\,867\,866\,560$ mật khẩu. □

Câu hỏi và bài tập

1. Giả sử bạn muốn mua một áo sơ mi cỡ 39 hoặc 40. Áo cỡ 39 có 5 màu khác nhau, áo cỡ 40 có 4 màu khác nhau. Hỏi bạn có bao nhiêu sự lựa chọn (về màu và cỡ áo) ?

2. Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà hai chữ số của nó đều chẵn ?

3. Trong một trường THPT, khối 11 có 280 học sinh nam và 325 học sinh nữ.

a) Nhà trường cần chọn một học sinh ở khối 11 đi dự dạ hội của học sinh thành phố. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn ?

b) Nhà trường cần chọn hai học sinh trong đó có một nam và một nữ đi dự trại hè của học sinh thành phố. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn ?

4. Từ các chữ số 1, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên

a) Có 4 chữ số (không nhất thiết khác nhau) ?

b) Có 4 chữ số khác nhau ?

Bài đọc thêm

QUY TẮC CỘNG MỞ RỘNG

Quy tắc cộng cho ta công thức tính số phần tử của hợp hai tập hợp hữu hạn không giao nhau. Tuy nhiên trong nhiều bài toán tổ hợp, chúng ta phải tính số phần tử của hợp hai tập hợp hữu hạn A và B có giao khác $\varnothing$. Trong trường hợp này, khi cộng số phần tử của A với số phần tử của B, thì số phần tử của $A \cap B$ sẽ được tính hai lần. Thành thử, ở kết quả phải bớt đi số phần tử của $A \cap B$. Ta có quy tắc cộng mở rộng sau đây :

Cho hai tập hợp hữu hạn bất kì A và B. Khi đó số phần tử của $A \cup B$ bằng số phần tử của A cộng với số phần tử của B rồi trừ đi số phần tử của $A \cap B$, tức là

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Ví dụ. Trong một trường THPT, khối 11 có : 160 học sinh tham gia câu lạc bộ Tin học, 140 học sinh tham gia câu lạc bộ Ngoại ngữ, 50 học sinh tham gia cả hai câu lạc bộ và 100 học sinh không tham gia câu lạc bộ nào trong hai câu lạc bộ nêu trên. Hỏi khối 11 ở trường đó có bao nhiêu học sinh ?

Giải

Gọi tập hợp học sinh khối 11 ở trường THPT tham gia câu lạc bộ Tin học và câu lạc bộ Ngoại ngữ lần lượt là A và B.

Khi đó tập hợp học sinh khối 11 ở trường đó tham gia câu lạc bộ (Tin học hoặc Ngoại ngữ) là $A \cup B$.

Theo bài ra ta có $|A| = 160$, $|B| = 140$, $|A \cap B| = 50$.

Theo quy tắc cộng mở rộng, số học sinh khối 11 tham gia câu lạc bộ (Tin học hoặc Ngoại ngữ) là

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 160 + 140 - 50 = 250.$$

Vậy khối 11 ở trường đó có $250 + 100 = 350$ (học sinh). □