§ 8 HÀM SỐ LIÊN TỤC

Trong định nghĩa giới hạn của hàm số tại một điểm, ta không giả thiết hàm số xác định tại điểm đó. Hơn nữa, nếu hàm số xác định tại điểm được xét thì giới hạn (nếu có) và giá trị của hàm số tại điểm đó không nhất thiết bằng nhau. Tuy nhiên với những hàm số thường gặp như các hàm đa thức, các hàm phân thức hữu tỉ, các hàm số lượng giác, ..., giới hạn và giá trị của hàm số tại mỗi điểm mà nó xác định là bằng nhau. Các hàm số có tính chất vừa nêu đóng vai trò quan trọng trong Giải tích và trong các ngành Toán học khác. Người ta gọi chúng là các *hàm số liên tục*.

1. Hàm số liên tục tại một điểm

ĐỊNH NGHĨA

Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(a\,;\,b)$ và $x_0 \in (a\,;\,b)$. Hàm số f được gọi là **liên tục** tại điểm x_0 nếu

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Hàm số không liên tục tại điểm x_0 được gọi là **gián đoạn** tại điểm x_0.

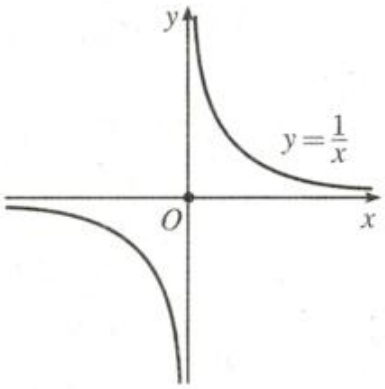
Ví dụ 1

a) Hàm số $f(x) = x^2$ liên tục tại mọi điểm $x_0 \in \mathbb{R}$ vì

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = x_0^2 = f(x_0).$$

b) Hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{với } x \neq 0 \\ 0 & \text{với } x = 0 \end{cases}$$



Hình 4.10

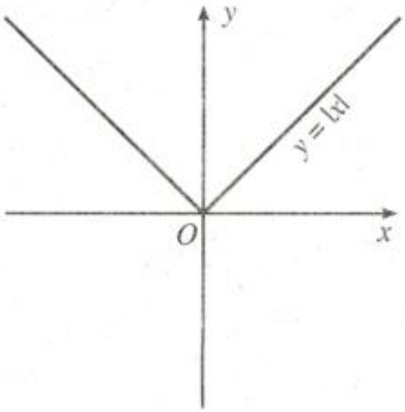
gián đoạn tại điểm $x = 0$ vì không tồn tại $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$ (h. 4.10). □

H1 *Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = |x|$ tại điểm $x = 0$ (h. 4.11).*

Ví dụ 2. Xét tính liên tục của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{với } x \neq -1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{với } x = -1 \end{cases}$$

tại điểm $x = -1$.



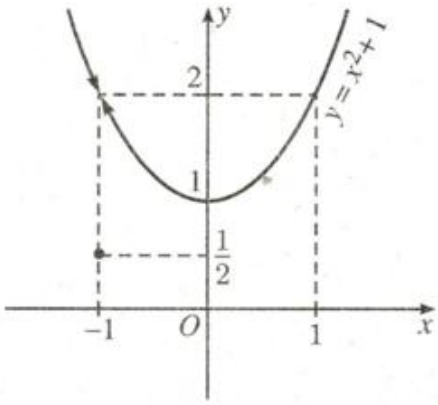
Hình 4.11

Giải

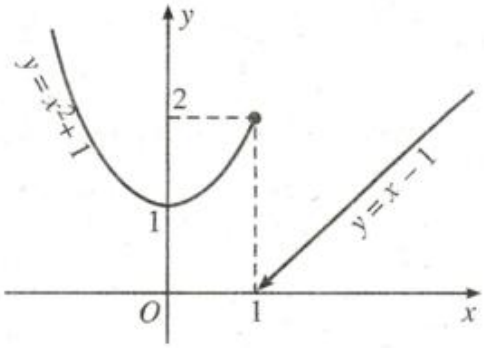
Ta có

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} (x^2 + 1) = 2 \text{ và } f(-1) = \frac{1}{2}.$$

Vì $\lim\limits_{x \to -1} f(x) \neq f(-1)$ nên hàm số f gián đoạn tại điểm $x = -1$ (h. 4.12). □



Hình 4.12



Hình 4.13

H2 *Xét tính liên tục của hàm số*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{với } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{với } x > 1 \end{cases}$$

tại điểm $x = 1$ (h. 4.13).

2. Hàm số liên tục trên một khoảng, trên một đoạn

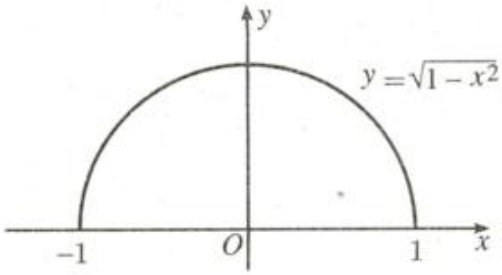
ĐỊNH NGHĨA

a) Giả sử hàm số f xác định trên tập hợp J, trong đó J là một khoảng hoặc hợp của nhiều khoảng. Ta nói rằng **hàm số f liên tục trên J** nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc tập hợp đó.

b) Hàm số f xác định trên đoạn $[a ; b]$ được gọi là **liên tục trên đoạn** $[a ; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a ; b)$ và

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b).$$

Ví dụ 3. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ trên đoạn $[-1 ; 1]$.



Hình 4.14

Giải

Hàm số đã cho xác định trên đoạn $[-1 ; 1]$.

Vì với mọi $x_0 \in (-1 ; 1)$ ta có

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - x_0^2} = f(x_0),$$

nên hàm số f liên tục trên khoảng $(-1 ; 1)$. Ngoài ra, ta có

$$\lim_{x \to (-1)^+} f(x) = \lim_{x \to (-1)^+} \sqrt{1 - x^2} = 0 = f(-1)$$

và $$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \sqrt{1 - x^2} = 0 = f(1).$$

Do đó hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[-1 ; 1]$ (h. 4.14). □

CHÚ Ý

Tính liên tục của hàm số trên các nửa khoảng $[a ; b)$, $(a ; b]$, $[a ; +\infty)$ và $(-\infty ; b]$ được định nghĩa tương tự như tính liên tục của hàm số trên một đoạn.

H3 *Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \sqrt{x + 1}$ liên tục trên nửa khoảng $[-1 ; +\infty)$ (tức là liên tục trên khoảng $(-1 ; +\infty)$ và $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x) = f(-1)$).*

Qua các ví dụ đã xét, chẳng hạn ví dụ 3, ta thấy hàm số liên tục trên một khoảng hoặc trên một đoạn có đồ thị là một đường "liền nét". Trong ví dụ 2, hàm số f gián đoạn tại điểm $x = -1$; đồ thị của nó không phải là một đường liền nét.

Nhận xét. Từ định lí 1 và nhận xét sau định lí 1 trong §4, dễ dàng suy ra

1) Tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số liên tục tại một điểm là những hàm số liên tục tại điểm đó (trong trường hợp thương, giá trị của mẫu tại điểm đó phải khác 0).

2) Hàm đa thức và hàm phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức) liên tục trên tập xác định của chúng (tức là liên tục tại mọi điểm thuộc tập xác định của chúng).

Ta thừa nhận định lí sau

ĐỊNH LÍ 1

> Các hàm số lượng giác $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ liên tục trên tập xác định của chúng.

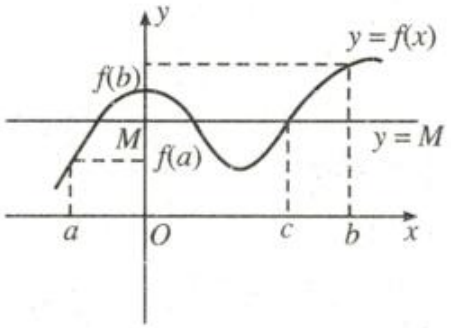
3. Tính chất của hàm số liên tục

ĐỊNH LÍ 2 (Định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục)

> Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn $[a ; b]$. Nếu $f(a) \neq f(b)$ thì với mỗi số thực M nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$, tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a ; b)$ sao cho $f(c) = M$.

Ý nghĩa hình học của định lí

Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a ; b]$ *và M là một số thực nằm giữa* $f(a)$ *và* $f(b)$ *thì đường thẳng* $y = M$ *cắt đồ thị của hàm số* $y = f(x)$ *ít nhất tại một điểm có hoành độ* $c \in (a ; b)$ (h. 4.15).



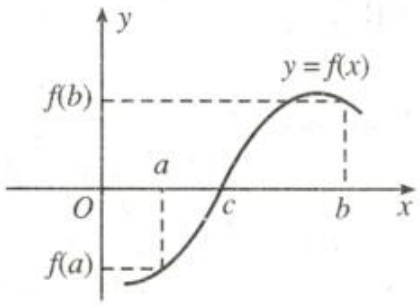
Hình 4.15

HỆ QUẢ

> Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a ; b]$ và $f(a)\,f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a ; b)$ sao cho $f(c) = 0$.

Ý nghĩa hình học của hệ quả

Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a ; b]$ *và* $f(a)f(b) < 0$ *thì đồ thị của hàm số* $y = f(x)$ *cắt trục hoành ít nhất tại một điểm có hoành độ* $c \in (a ; b)$ (h. 4.16).



Hình 4.16

Ví dụ 4. Cho hàm số $P(x) = x^3 + x - 1$.

Áp dụng hệ quả, chứng minh rằng phương trình $P(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm dương nhỏ hơn 1.

Giải

Hàm số P liên tục trên đoạn $[0 ; 1]$, $P(0) = -1$ và $P(1) = 1$.

Vì $P(0)P(1) < 0$ nên theo hệ quả, tồn tại ít nhất một điểm $c \in (0 ; 1)$ sao cho $P(c) = 0$.

$x = c$ chính là một nghiệm dương nhỏ hơn 1 của phương trình $P(x) = 0$. □

H4 *Cho hàm số* $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x - 2}{2x + 2}$. *Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một điểm* $c \in (0 ; 2)$ *sao cho* $f(c) = -0{,}8$.

Câu hỏi và bài tập

46. Chứng minh rằng :

a) Các hàm số $f(x) = x^3 - x + 3$ và $g(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$ liên tục tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$.

b) Hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} & \text{với } x \neq 2, \\ 1 & \text{với } x = 2 \end{cases}$

liên tục tại điểm $x = 2$.

c) Hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} & \text{với } x \neq 1, \\ 2 & \text{với } x = 1 \end{cases}$

gián đoạn tại điểm $x = 1$.

47. Chứng minh rằng :

a) Hàm số $f(x) = x^4 - x^2 + 2$ liên tục trên $\mathbb{R}$;

b) Hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ liên tục trên khoảng$(-1 ; 1)$;

c) Hàm số $f(x) = \sqrt{8 - 2x^2}$ liên tục trên đoạn $[-2 ; 2]$;

d) Hàm số $f(x) = \sqrt{2x - 1}$ liên tục trên nửa khoảng $\left[\dfrac{1}{2} ; +\infty\right)$.

48. Chứng minh rằng mỗi hàm số sau đây liên tục trên tập xác định của nó :

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 4}{2x + 1}$; b) $f(x) = \sqrt{1 - x} + \sqrt{2 - x}$.

49. Chứng minh rằng phương trình

$$x^2\cos x + x\sin x + 1 = 0$$

có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0 ; \pi)$.

Bài đọc thêm

TÌM GIÁ TRỊ GẦN ĐÚNG NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH

Ta sẽ đưa ra một kĩ thuật tìm giá trị gần đúng nghiệm của một phương trình nhờ áp dụng hệ quả của định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục.

Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn $[a ; b]$ và $f(a)$, $f(b)$ trái dấu. Khi đó, khoảng $(a ; b)$ chứa ít nhất một nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

Gọi m là trung điểm của đoạn $[a ; b]$, tức là $m = \dfrac{a + b}{2}$.

1. Nếu $f(m) = 0$ thì m là một nghiệm của phương trình.

2. Nếu $f(m) \neq 0$ thì $f(m)$ trái dấu với $f(a)$ hoặc trái dấu với $f(b)$.

a) Nếu $f(m)$ trái dấu với $f(a)$ thì phương trình có nghiệm nằm trong khoảng $(a ; m)$.

b) Nếu $f(m)$ trái dấu với $f(b)$ thì phương trình có nghiệm nằm trong khoảng $(m ; b)$.

Giả sử xảy ra trường hợp a). Gọi m_1 là trung điểm của đoạn $[a ; m]$, tức là $m_1 = \dfrac{a + m}{2}$. Ta lại xét giá trị $f(m_1)$ như đã làm ban đầu.

Tiếp tục quá trình đó, sau một số hữu hạn bước, ta tìm được hoặc một nghiệm của phương trình hoặc giá trị gần đúng của một nghiệm với độ chính xác mong muốn vì các đoạn chứa nghiệm ngày càng "thắt" lại.

Ví dụ 1. Hàm số $f(x) = -2x^3 + 7x^2 + 6x - 21$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Vì $f(-2) = 11$ và $f(-1) = -18$, nên phương trình $-2x^3 + 7x^2 + 6x - 21 = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(-2 ; -1)$. Ta tìm giá trị gần đúng của nghiệm đó theo cách đã nêu.

• Trung điểm của đoạn $[-2 ; -1]$ là $-1,5$; Vì $f(-1,5) = -7,5$ nên phương trình có nghiệm nằm trong khoảng $(-2 ; -1,5)$.

• Trung điểm của đoạn $[-2 ; -1,5]$ là $-1,75$; Vì $f(-1,75) = 0,65625$ nên phương trình có nghiệm nằm trong khoảng $(-1,75 ; -1,5)$.

Ta tiếp tục làm như vậy cho đến khi đạt được giá trị gần đúng của nghiệm với độ chính xác cần có.

Quy tắc thực hành

Trong tính toán ta không quan tâm đến các giá trị liên tiếp của $f(x)$ mà chỉ quan tâm đến dấu của chúng. Vì vậy, ta ghi các giá trị liên tiếp của x trong một bảng gồm hai cột : cột + và cột –.

• Trong cột + ta ghi các giá trị của x, tại đó $f(x)$ lấy giá trị dương.

• Trong cột – ta ghi các giá trị của x, tại đó $f(x)$ lấy giá trị âm.

• Mỗi giá trị tiếp theo của x là trung bình cộng của giá trị sau cùng của cột + và giá trị sau cùng của cột – trước nó.

• Nghiệm của phương trình nằm giữa giá trị sau cùng của cột + và giá trị sau cùng của cột –.

Chẳng hạn, với ví dụ 1, ta có bảng sau :

	+	–	
$f(-2) = 11$	-2		
		-1	$f(-1) = -18$
		$-1,5$	$f(-1,5) = -7,5$
$f(-1,75) = 0,65625$	$-1,75$		
		$-1,625$	$f(-1,625) = -3,68359375$
		$-1,6875$	$f(-1,6875) = -1,5805664063$
		$-1,71875$	

Phương trình có nghiệm x_0 thoả mãn

$$-1,75 < x_0 < -1,71875.$$

Giá trị gần đúng của nghiệm là $-1,7$ sai khác không quá $0,1$. □

Ví dụ 2. Tìm giá trị gần đúng của $\sqrt{2}$ với ba chữ số thập phân.

Giải

Ta thấy $\sqrt{2}$ là một nghiệm của phương trình

$$f(x) = x^2 - 2 = 0.$$

Vì $f(1) = -1$ và $f(2) = 2$ nên phương trình trên có một nghiệm nằm trong khoảng $(1 ; 2)$; đó là $\sqrt{2}$ (còn nghiệm $-\sqrt{2}$ của phương trình nằm ngoài đoạn $[1 ; 2]$). Bảng sau đây cho ta giá trị gần đúng của $\sqrt{2}$.

−	+
1	2
	1,5
1,25	
1,375	
	1,4375
1,40625	
	1,421875
1,4140625	
	1,41796875
	1,416015625
	1,4150390625
	1,41455078125

Từ bảng trên ta có

$$1{,}4140625 < \sqrt{2} < 1{,}41455078125.$$

Giá trị gần đúng của $\sqrt{2}$ *là* 1,414 *sai khác không quá* 0,001. □

Luyện tập

50. Chứng minh rằng :

a) Hàm số

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{với } x \le 0 \\ x^2 + 2 & \text{với } x > 0 \end{cases}$$

gián đoạn tại điểm $x = 0$.

b) Mỗi hàm số

$$g(x) = \sqrt{x-3} \text{ và } h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & \text{với } x \le 1 \\ -\dfrac{1}{x} & \text{với } x > 1 \end{cases}$$

liên tục trên tập xác định của nó.

51. Giải thích vì sao

a) Hàm số $f(x) = x^2 \sin x - 2\cos^2 x + 3$ liên tục trên $\mathbb{R}$;

b) Hàm số $g(x) = \dfrac{x^3 + x\cos x + \sin x}{2\sin x + 3}$ liên tục trên $\mathbb{R}$;

c) Hàm số $h(x) = \dfrac{(2x+1)\sin x - \cos^3 x}{x\sin x}$ liên tục tại mọi điểm $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

52. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = x^2 + x + 3 + \dfrac{1}{x-2}$ liên tục trên tập xác định của nó.

53. Chứng minh rằng phương trình $x^3 + x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm lớn hơn -1.

54. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{với } x \neq 0 \\ -1 & \text{với } x = 0 \end{cases}$$

a) Chứng tỏ rằng $f(-1)f(2) < 0$.

b) Chứng tỏ rằng phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm thuộc khoảng $(-1\,;2)$.

c) Điều khẳng định trong b) có mâu thuẫn với định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục hay không ?

Em có biết

CÔ-SI, NHÀ TOÁN HỌC LỚN

Nhà toán học Pháp Cô-si (Cauchy) là một trong những người sáng lập ra Giải tích hiện đại, đồng thời ông cũng có nhiều đóng góp sâu sắc trong các ngành toán học và khoa học khác. Ông đã để lại dấu ấn thiên tài của mình trong nền Toán học thế kỉ XIX.

Sinh ở Pa-ri, từ rất sớm ông đã ham mê toán học. Năm mười sáu tuổi ông vào học Đại học Bách khoa Pa-ri và trở thành kĩ sư. Sau đó, ông tham gia xây dựng quân cảng Sec-bua (Cherbourg). Hăng say lao động nhưng sức khoẻ không tốt, ông đành phải trở về giảng dạy Giải tích và Cơ học tại Đại học Bách khoa Pa-ri.

Augustin Louis Cauchy
(1789 - 1857)

Từ thế kỉ XVIII, nhà toán học Thuỵ Sĩ Lê-ô-na Ơ-le (Leonhard Euler, 1707 – 1783) đã phát triển phép tính vi phân của nhà toán học Anh Niu-tơn (Newton, 1642 – 1727) và nhà toán học Đức Lai-bơ-nít (Leibniz, 1646 – 1716). Tuy nhiên, các khái niệm vô cực, vô cùng bé và vô cùng lớn vẫn còn tối nghĩa, không rõ ràng, lập luận còn thiếu chặt chẽ.

Trong giảng dạy, Cô-si quan tâm đặc biệt đến việc định nghĩa các khái niệm một cách chặt chẽ. Nhiều định lí và phương pháp do ông chứng minh và phát minh mang tên ông. Chính ông là người đầu tiên đã trình bày khái niệm giới hạn của hàm số bằng ngôn ngữ như hiện nay đang được giảng dạy trong các trường đại học.

Giáo trình Giải tích mà ông giảng dạy và công bố đã ngay lập tức bị các sinh viên và các đồng nghiệp phê phán bởi vì nội dung của nó vượt xa mục tiêu đào tạo các kĩ sư tương lai thời đó. Cuộc cách mạng năm 1830 đã làm gián đoạn sự nghiệp của ông. Trung thành với Sác-lơ X (Charles X), ông đã từ chối không tuyên thệ trung thành với vua Lu-i Phi-lip Đooc-lê-ăng (Louis Philippe d'Orléan), người thay thế Sác-lơ.

Ông đã bị đi đày ở Tu-rin, sau đó ở Pra-ha. Tại đây ông đã làm gia sư cho công tước Booc-đô (Bordeaux), cháu của vua Pháp bị phế truất.

Trở về Pa-ri năm 1838, tính cố chấp của ông về chính trị đối với chế độ mới đã khiến ông bỏ lỡ nhiều vị trí công tác mà nhiều người ao ước.

Cuộc Cách mạng Cộng hoà năm 1848 đã giải lời thề trung thành cho các công chức. Nhà toán học thiên tài đã hết ưu phiền và nhận ghế Giáo sư Thiên văn – Toán tại Đại học Sooc-bon (Sorbonne). Ông giảng dạy và nghiên cứu ở đó cho đến cuối đời.

Ông đã có nhiều đóng góp về Giải tích, Đại số, Hình học, Số học, Lí thuyết hàm số phức, Cơ học, Quang học, Thiên văn học, ...