§ 2 HOÁN VỊ, CHỈNH HỢP VÀ TỔ HỢP

1. Hoán vị

a) Hoán vị là gì ?

Ví dụ 1. Ba vận động viên An, Bình và Châu chạy thi. Nếu không kể trường hợp có hai vận động viên về đích cùng một lúc thì các khả năng sau đây đều có thể xảy ra :

Giải	Các kết quả có thể					
Nhất	An	An	Bình	Bình	Châu	Châu
Nhì	Bình	Châu	An	Châu	An	Bình
Ba	Châu	Bình	Châu	An	Bình	An

Kết quả cuộc thi chạy là một danh sách gồm ba người xếp theo thứ tự nhất, nhì, ba. Danh sách này gọi là *một hoán vị* của tập hợp {An, Bình, Châu}. Nếu kí hiệu tập hợp {An, Bình, Châu} là $\{a, b, c\}$ thì tập này có tất cả sáu hoán vị là (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a).

Một cách tổng quát, ta có

> Cho tập hợp A có n ($n \geq 1$) phần tử. Khi sắp xếp n phần tử này theo một thứ tự, ta được một **hoán vị** các phần tử của tập A (gọi tắt là một hoán vị của A).

H1 *Cho tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$. Hãy viết tám hoán vị của A.*

b) Số các hoán vị

Bài toán đặt ra là : Nếu tập hợp A có n phần tử thì có tất cả bao nhiêu hoán vị của A ?

Kí hiệu P_n là số các hoán vị của tập hợp có n phần tử. Ta có

ĐỊNH LÍ 1

> Số các hoán vị của một tập hợp có n phần tử là
> $$P_n = n! = n(n-1)(n-2)...1.$$

Chứng minh

Việc sắp xếp thứ tự n phần tử của A là một công việc gồm n công đoạn. Công đoạn 1 là chọn phần tử để xếp vào vị trí thứ nhất, công đoạn 2 là chọn phần tử để xếp vào vị trí thứ hai, công đoạn 3 là chọn phần tử để xếp vào vị trí thứ ba, ..., công đoạn n là chọn phần tử để xếp vào vị trí thứ n. Ở công đoạn 1 ta có thể chọn bất kì phần tử nào trong n phần tử của A nên có n cách thực hiện. Sau khi chọn xong phần tử xếp vào vị trí thứ nhất, ở công đoạn 2 ta có thể chọn bất kì phần tử nào trong $n-1$ phần tử còn lại của A để xếp vào vị trí thứ hai nên có $n-1$ cách thực hiện. Tiếp tục như vậy ở bước 3 ta có $n-2$ cách thực hiện, ..., và ở bước thứ n (bước cuối cùng) ta chỉ còn 1 cách thực hiện. Theo quy tắc nhân, ta có cả thảy $n(n-1)(n-2)...1 = n!$ cách sắp xếp thứ tự n phần tử của tập A, tức là có $n!$ hoán vị. □

Ví dụ 2. Một đoàn khách du lịch dự định đến tham quan bảy địa điểm A, B, C, D, E, G và H ở thủ đô Hà Nội. Họ đi tham quan theo một thứ tự nào đó, chẳng hạn $B \to A \to C \to E \to D \to G \to H$. Như vậy, mỗi cách chọn thứ tự các địa điểm tham quan là một hoán vị của tập $\{A, B, C, D, E, G, H\}$. Thành thử, đoàn khách có tất cả $7! = 5040$ cách chọn. □

H2 *Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được tất cả bao nhiêu số tự nhiên có năm chữ số khác nhau ?*

2. Chỉnh hợp

a) Chỉnh hợp là gì ?

Ví dụ 3. Trong trận chung kết bóng đá phải phân định thắng thua bằng đá luân lưu 11 mét. Huấn luyện viên của mỗi đội cần trình với trọng tài một danh sách sắp thứ tự 5 cầu thủ trong số 11 cầu thủ để đá luân lưu 5 quả 11 mét.

Mỗi danh sách có xếp thứ tự 5 cầu thủ được gọi là một *chỉnh hợp* chập 5 của 11 cầu thủ.

Một cách tổng quát, ta có

> Cho tập hợp A gồm n phần tử và số nguyên k với $1 \leq k \leq n$. Khi lấy ra k phần tử của A và sắp xếp chúng theo một thứ tự, ta được một **chỉnh hợp** chập k của n phần tử của A (gọi tắt là một chỉnh hợp chập k của A).

H3 *Cho tập hợp $A = \{a, b, c\}$. Hãy viết tất cả các chỉnh hợp chập 2 của A.*

Nhận xét

Hai chỉnh hợp khác nhau khi và chỉ khi hoặc có ít nhất một phần tử của chỉnh hợp này mà không là phần tử của chỉnh hợp kia, hoặc các phần tử của hai chỉnh hợp giống nhau nhưng được sắp xếp theo thứ tự khác nhau.

b) Số các chỉnh hợp

Ví dụ 4. Trở lại ví dụ 3, hãy tính xem huấn luyện viên của mỗi đội có bao nhiêu cách lập danh sách 5 cầu thủ.

Giải

Huấn luyện viên của mỗi đội có thể chọn một trong 11 cầu thủ để đá quả đầu tiên. Tiếp theo có 10 cách chọn cầu thủ đá quả thứ hai, rồi có 9 cách chọn cầu thủ đá quả thứ ba, rồi lại có 8 cách chọn cầu thủ đá quả thứ tư và cuối cùng có 7 cách chọn cầu thủ đá quả thứ năm. Theo quy tắc nhân, huấn luyện viên của mỗi đội sẽ có

$$11 \,.\, 10 \,.\, 9 \,.\, 8 \,.\, 7 = 55440 \text{ cách chọn.} \qquad \square$$

Bài toán tổng quát đặt ra là : Cho một tập hợp có n phần tử và số nguyên k với $1 \leq k \leq n$. Hỏi có tất cả bao nhiêu chỉnh hợp chập k của tập hợp đó ?

Số các chỉnh hợp chập k của một tập hợp có n phần tử được kí hiệu là A_n^k.

ĐỊNH LÍ 2

> Số các chỉnh hợp chập k của một tập hợp có n phần tử $(1 \leq k \leq n)$ là
>
> $$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1). \qquad (1)$$

Chứng minh

Việc lập một chỉnh hợp chập k của tập hợp có n phần tử được coi như một công việc gồm k công đoạn. Công đoạn 1 là chọn phần tử xếp vào vị trí thứ nhất. Công đoạn 2 là chọn phần tử xếp vào vị trí thứ hai, ... Công đoạn k là

chọn phần tử xếp vào vị trí thứ k. Vì tập hợp có n phần tử nên công đoạn 1 có n cách thực hiện. Sang công đoạn 2 chỉ còn $n - 1$ phần tử chưa chọn cho nên có $n - 1$ cách thực hiện. Tương tự công đoạn 3 có $n - 2$ cách chọn, ... và ở công đoạn cuối (công đoạn thứ k) ta có $n - k + 1$ cách thực hiện. Theo quy tắc nhân, ta có $n(n - 1)(n - 2)...(n - k + 1)$ cách lập ra một chỉnh hợp chập k. Đó cũng chính là số các chỉnh hợp chập k của một tập hợp gồm n phần tử. □

Nhận xét

Từ định nghĩa ta thấy một hoán vị của tập hợp n phần tử là một chỉnh hợp chập n của tập đó nên $A_n^n = P_n = n!$.

Ví dụ 5. Trong mặt phẳng cho một tập hợp gồm 6 điểm phân biệt. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ $\vec{0}$ có điểm đầu và điểm cuối thuộc tập hợp điểm này ?

Giải

Mỗi cặp sắp thứ tự gồm hai điểm (A, B) cho ta một vectơ có điểm đầu A, điểm cuối B và ngược lại. Như vậy, mỗi vectơ có thể xem là một chỉnh hợp chập 2 của tập hợp 6 điểm đã cho. Thành thử số vectơ cần tìm là

$$A_6^2 = 6 \,.\, 5 = 30.$$ □

CHÚ Ý

- Với $0 < k < n$ thì ta có thể viết công thức (1) dưới dạng

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad (2)$$

- Ta quy ước

$$0! = 1 \text{ và } A_n^0 = 1.$$

Khi đó công thức (2) đúng cho cả $k = 0$ và $k = n$. Vậy công thức (2) đúng với mọi số nguyên k thoả mãn $0 \le k \le n$.

3. Tổ hợp

a) Tổ hợp là gì ?

Cho tập A có n phần tử và số nguyên k với $1 \le k \le n$. Mỗi tập con của A có k phần tử được gọi là một **tổ hợp** chập k của n phần tử của A (gọi tắt là một tổ hợp chập k của A).

Như vậy lập một tổ hợp chập k của A chính là lấy ra k phần tử của A (không quan tâm đến thứ tự).

H4 *Viết tất cả các tổ hợp chập 3 của tập $A = \{a, b, c, d\}$.*

b) Số các tổ hợp

Kí hiệu C_n^k (hoặc $\binom{n}{k}$) là số các tổ hợp chập k của một tập hợp có n phần tử.

ĐỊNH LÍ 3

Số các tổ hợp chập k của một tập hợp có n phần tử ($1 \le k \le n$) là

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}. \quad (3)$$

Chứng minh

Mỗi cách sắp thứ tự các phần tử của một tổ hợp chập k của A cho ta một chỉnh hợp chập k của A. Nói cách khác, mỗi hoán vị của một tổ hợp chập k của A cho ta một chỉnh hợp chập k của A. Vậy từ một tổ hợp chập k của A ta lập được $k!$ chỉnh hợp chập k của A. Vậy ta có

$$A_n^k = C_n^k k! \text{ hay } C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}. \quad \square$$

CHÚ Ý

- Với $1 \le k \le n$, ta có thể viết công thức (3) dưới dạng

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (4)$$

- Ta quy ước $C_n^0 = 1$ (coi $\varnothing$ là tổ hợp chập 0 của tập hợp có n phần tử). Với quy ước này công thức (4) cũng đúng với $k = 0$. Vậy công thức (4) đúng với mọi số nguyên k thoả mãn $0 \le k \le n$.

Ví dụ 6. Trong mặt phẳng cho một tập hợp P gồm 7 điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hỏi có bao nhiêu tam giác có 3 đỉnh đều thuộc P ?

Giải

Với mỗi tập con gồm 3 điểm bất kì của P, ta tạo được một tam giác với các đỉnh là 3 điểm đó. Ngược lại, mỗi tam giác có 3 đỉnh thuộc P tương ứng với

một tập con gồm 3 điểm của P. Vậy số tam giác có 3 đỉnh thuộc P chính bằng số các tổ hợp chập 3 của tập P, tức là bằng

$$C_7^3 = \frac{7.6.5}{3!} = 35. \qquad \square$$

Trong một số bài toán đếm phức tạp hơn, ta cần phối hợp sử dụng các công thức về tổ hợp và quy tắc nhân.

Ví dụ 7. Trong một lớp có 20 học sinh nam và 15 học sinh nữ. Thầy giáo chủ nhiệm cần chọn 4 học sinh nam và 3 học sinh nữ đi tham gia chiến dịch "*Mùa hè xanh*" của Đoàn Thanh niên Cộng sản Hồ Chí Minh. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?

Giải

Ta có $C_{20}^4 = \dfrac{20.19.18.17}{1.2.3.4} = 4845$ cách chọn 4 học sinh nam trong số 20 học sinh nam và có $C_{15}^3 = \dfrac{15.14.13}{1.2.3} = 455$ cách chọn 3 học sinh nữ trong số 15 học sinh nữ. Theo quy tắc nhân, số cách chọn là

$$4845 \,.\, 455 = 2\,204\,475. \qquad \square$$

4. Hai tính chất cơ bản của số C_n^k

a) Tính chất 1

> Cho số nguyên dương n và số nguyên k với $0 \le k \le n$. Khi đó $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Chứng minh

Ta có $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $C_n^{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$.

Do đó $C_n^k = C_n^{n-k}$. $\square$

b) Tính chất 2 (hằng đẳng thức Pa-xcan)

> Cho các số nguyên n và k với $1 \le k \le n$. Khi đó
>
> $$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}.$$

Chứng minh

Ta có $\quad C_n^{k-1} = \dfrac{n(n-1)...(n-k+2)}{(k-1)!}$, $C_n^k = \dfrac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$.

Vậy

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n(n-1)...(n-k+1) + kn(n-1)...(n-k+2)}{k!}$$

$$= \frac{n(n-1)...(n-k+2)(n-k+1+k)}{k!}$$

$$= \frac{(n+1)n...(n-k+2)}{k!} = C_{n+1}^k.$$ □

Câu hỏi và bài tập

5. Có bao nhiêu khả năng có thể xảy ra đối với thứ tự giữa các đội trong một giải bóng đá có 5 đội bóng ? (Giả sử rằng không có hai đội nào có điểm trùng nhau).

6. Giả sử có 8 vận động viên tham gia chạy thi. Nếu không kể trường hợp có hai vận động viên về đích cùng một lúc thì có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra đối với các vị trí thứ nhất, thứ nhì và thứ ba ?

7. Trong mặt phẳng cho một tập hợp P gồm n điểm. Hỏi :

a) Có bao nhiêu đoạn thẳng mà hai đầu mút thuộc P ?

b) Có bao nhiêu vectơ khác vectơ $\vec{0}$ mà điểm đầu và điểm cuối thuộc P ?

8. Trong một Ban chấp hành đoàn gồm 7 người, cần chọn 3 người vào ban thường vụ.

a) Nếu không có sự phân biệt về chức vụ của 3 người trong ban thường vụ thì có bao nhiêu cách chọn ?

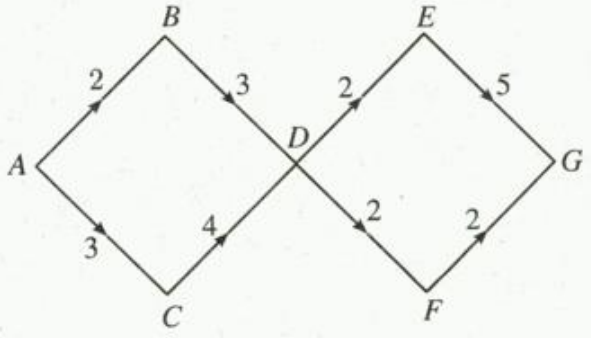
b) Nếu cần chọn 3 người vào ban thường vụ với các chức vụ : Bí thư, Phó Bí thư, Uỷ viên thường vụ thì có bao nhiêu cách chọn ?

Luyện tập

9. Một bài thi trắc nghiệm khách quan gồm 10 câu. Mỗi câu có 4 phương án trả lời. Hỏi bài thi đó có bao nhiêu phương án trả lời ?

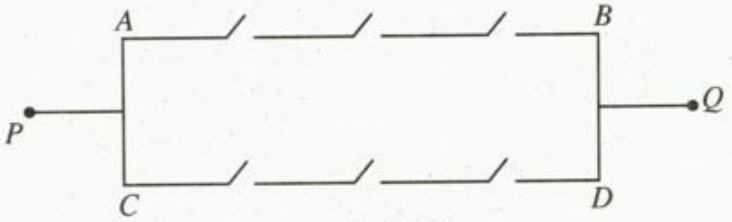
10. Có bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số và chia hết cho 5 ?

11. Xét mạng đường nối các tỉnh A, B, C, D, E, F, G, trong đó số viết trên một cạnh cho biết số con đường nối hai tỉnh nằm ở hai đầu mút của cạnh (h. 2.2). Hỏi có bao nhiêu cách đi từ tỉnh A đến tỉnh G ?



Hình 2.2

12. Xét sơ đồ mạng điện ở hình 2.3 có 6 công tắc khác nhau, trong đó mỗi công tắc có 2 trạng thái đóng và mở.



Hình 2.3

Hỏi có bao nhiêu cách đóng - mở 6 công tắc để mạng điện thông mạch từ P đến Q (tức là có dòng điện từ P đến Q) ?

13. Một cuộc thi có 15 người tham dự, giả thiết rằng không có hai người nào có điểm bằng nhau.

a) Nếu kết quả của cuộc thi là việc chọn ra 4 người điểm cao nhất thì có bao nhiêu kết quả có thể ?

b) Nếu kết quả của cuộc thi là việc chọn ra các giải nhất, nhì, ba thì có bao nhiêu kết quả có thể ?

14. Trong một dạ hội cuối năm ở một cơ quan, ban tổ chức phát ra 100 vé xổ số đánh số từ 1 đến 100 cho 100 người. Xổ số có bốn giải : 1 giải nhất, 1 giải nhì, 1 giải ba, 1 giải tư. Kết quả là việc công bố ai trúng giải nhất, giải nhì, giải ba, giải tư. Hỏi :

a) Có bao nhiêu kết quả có thể ?

b) Có bao nhiêu kết quả có thể, nếu biết rằng người giữ vé số 47 được giải nhất ?

c) Có bao nhiêu kết quả có thể, nếu biết rằng người giữ vé số 47 trúng một trong bốn giải ?

15. Một tổ có 8 em nam và 2 em nữ. Người ta cần chọn ra 5 em trong tổ tham dự cuộc thi học sinh thanh lịch của trường. Yêu cầu trong các em được chọn, phải có ít nhất một em nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?

16. Một nhóm học sinh có 7 em nam và 3 em nữ. Người ta cần chọn ra 5 em trong nhóm tham gia đồng diễn thể dục. Trong 5 em được chọn, yêu cầu không có quá một em nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?