§ 1 KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM

1. Ví dụ mở đầu

Từ vị trí O (ở một độ cao nhất định nào đó), ta thả một viên bi cho rơi tự do xuống đất và nghiên cứu chuyển động của viên bi. Trong *Vật lí 10* ta đã biết : Nếu chọn trục Oy theo phương thẳng đứng, chiều dương hướng xuống đất, gốc O là vị trí ban đầu của viên bi (tại thời điểm $t = 0$) và bỏ qua sức cản của không khí thì phương trình chuyển động của viên bi là

$$y = f(t) = \frac{1}{2}gt^2 \text{ (} g \text{ là gia tốc rơi tự do, } g \approx 9{,}8 \text{ m/s}^2\text{).}$$

Giả sử tại thời điểm t_0, viên bi ở vị trí M_0 có toạ độ $y_0 = f(t_0)$; tại thời điểm t_1 ($t_1 > t_0$), viên bi ở vị trí M_1 có toạ độ $y_1 = f(t_1)$. Khi đó, trong khoảng thời gian từ t_0 đến t_1, quãng đường viên bi đi được là $M_0M_1 = f(t_1) - f(t_0)$ (h.5.1). Vậy *vận tốc trung bình* của viên bi trong khoảng thời gian đó là

$$\frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}. \qquad (1)$$

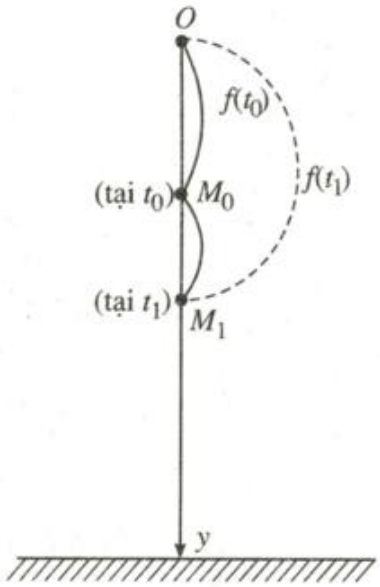
Nếu $t_1 - t_0$ càng nhỏ thì tỉ số (1) càng phản ánh chính xác hơn sự nhanh chậm của viên bi tại thời điểm t_0. Từ đó, người ta xem giới hạn của tỉ số $\frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$ khi t_1 dần đến t_0 là *vận tốc tức thời* tại thời điểm t_0 của viên bi, kí hiệu là $v(t_0)$. Nói cách khác,

$$v(t_0) = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0} \qquad \square$$

Nhiều vấn đề của toán học, vật lí, hoá học, sinh học, ... dẫn đến bài toán tìm giới hạn

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

trong đó $y = f(x)$ là hàm số nào đó.



Hình 5.1

Trong toán học, người ta gọi giới hạn đó, nếu có và hữu hạn, là *đạo hàm của hàm số* $y = f(x)$ tại điểm x_0.

2. Đạo hàm của hàm số tại một điểm

a) Khái niệm đạo hàm của hàm số tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a ; b)$ và điểm x_0 thuộc khoảng đó.

ĐỊNH NGHĨA

Giới hạn hữu hạn (nếu có) của tỉ số $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ khi x dần đến x_0 được gọi là **đạo hàm** của hàm số đã cho tại điểm x_0, kí hiệu là $f'(x_0)$ hoặc $y'(x_0)$, nghĩa là

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Trong định nghĩa trên, nếu đặt $\Delta x = x - x_0$ và $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ thì ta có

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (2)$$

CHÚ Ý

1) Số $\Delta x = x - x_0$ được gọi là *số gia của biến số* tại điểm x_0 ; số $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ được gọi là *số gia của hàm số* ứng với số gia Δx tại điểm x_0.

2) Số Δx không nhất thiết chỉ mang dấu dương.

3) Δx và Δy là những kí hiệu, không nên nhầm lẫn rằng : Δx là tích của Δ với x, Δy là tích của Δ với y.

H1 *Tính số gia của hàm số $y = x^2$ ứng với số gia Δx của biến số tại điểm $x_0 = -2$.*

b) Quy tắc tính đạo hàm theo định nghĩa

Ta có quy tắc tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ theo định nghĩa như sau :

QUY TẮC

Muốn tính đạo hàm của hàm số f tại điểm x_0 theo định nghĩa, ta thực hiện hai bước sau :

• *Bước 1*. Tính Δy theo công thức $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, trong đó Δx là số gia của biến số tại x_0

• *Bước 2*. Tìm giới hạn $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Trong quy tắc trên và đối với mỗi hàm số được xét sau đây, ta luôn hiểu Δy là số gia của hàm số ứng với số gia Δx đã cho của biến số tại điểm đang xét.

Ví dụ 1. Tính đạo hàm của hàm số $y = x^2$ tại điểm $x_0 = 2$.

Giải. Đặt $f(x) = x^2$, ta thực hiện quy tắc trên như sau :

• Tính Δy

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (2 + \Delta x)^2 - 2^2 = \Delta x(4 + \Delta x).$$

• Tìm giới hạn

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (4 + \Delta x) = 4.$$

Vậy $f'(2) = 4$. □

Nhận xét

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì nó liên tục tại điểm x_0.

Thật vậy, giả sử hàm số f có đạo hàm $f'(x_0)$, tức là $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$.

Ta có

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = f'(x_0).\ 0 = 0.$$

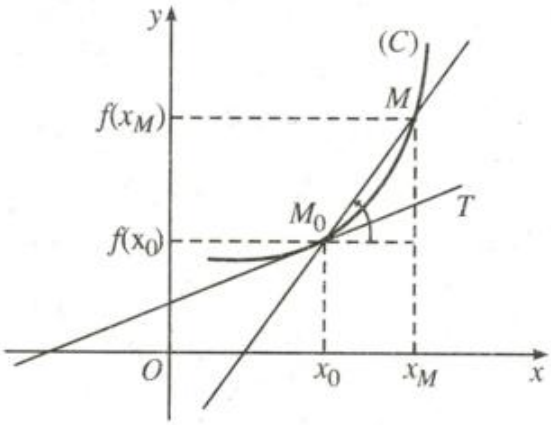
Do đó $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0)\right) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. Điều này chứng tỏ

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Từ đó suy ra rằng hàm số f liên tục tại điểm x_0.

3. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C), một điểm M_0 cố định thuộc (C) có hoành độ x_0. Với mỗi điểm M thuộc (C) khác M_0, ta kí hiệu x_M là hoành độ của nó và k_M là hệ số góc của cát tuyến M_0M. Giả sử tồn tại giới hạn hữu hạn $k_0 = \lim\limits_{x_M \to x_0} k_M$.



Hình 5.2

Khi đó, ta coi đường thẳng M_0T đi qua M_0 và có hệ số góc k_0 là *vị trí giới hạn* của cát tuyến M_0M khi M di chuyển dọc theo (C) dần đến M_0.

Đường thẳng M_0T được gọi là *tiếp tuyến* của (C) tại điểm M_0, còn M_0 gọi là *tiếp điểm*.

Bây giờ giả sử hàm số f có đạo hàm tại điểm x_0.

Chú ý rằng tại mỗi vị trí của M trên (C), ta luôn có $k_M = \dfrac{f(x_M) - f(x_0)}{x_M - x_0}$ (h. 5.2).

Vì hàm số f có đạo hàm tại điểm x_0 nên

$$f'(x_0) = \lim_{x_M \to x_0} \frac{f(x_M) - f(x_0)}{x_M - x_0} = \lim_{x_M \to x_0} k_M = k_0.$$

Từ đó ta có thể phát biểu ý nghĩa hình học của đạo hàm như sau :

Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số đó tại điểm $M_0(x_0 ; f(x_0))$.

GHI NHỚ

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M_0(x_0 ; f(x_0))$ có phương trình là

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).}$$

Ví dụ 2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$.

Giải

Trước hết ta tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x^3$ tại $x_0 = -1$.

• Tính Δy

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (-1 + \Delta x)^3 - (-1)^3 = \Delta x\,(3 - 3\Delta x + \Delta x^2).$$

• Tính giới hạn

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(3 - 3\Delta x + \Delta x^2\right) = 3.$$

Vậy $f'(-1) = 3$.

Ngoài ra, ta có $f(x_0) = (-1)^3 = -1$ nên phương trình tiếp tuyến cần tìm là

$$y = 3(x + 1) - 1, \text{ hay } y = 3x + 2.$$ □

H2 *Dựa vào kết quả của ví dụ 1, hãy viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^2$ tại điểm $M_0(2\,;4)$.*

4. Ý nghĩa cơ học của đạo hàm

Xét sự chuyển động của một chất điểm. Giả sử quãng đường s đi được của nó là một hàm số $s = s(t)$ của thời gian t ($s = s(t)$ còn gọi là phương trình chuyển động của chất điểm).

Tương tự như ví dụ mở đầu, khi $|\Delta t|$ càng nhỏ (khác 0) thì tỉ số

$$\frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

càng phản ánh chính xác độ nhanh chậm của chuyển động tại thời điểm t_0. Người ta gọi giới hạn hữu hạn

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

(nếu có) là *vận tốc tức thời* của chuyển động tại thời điểm t_0.

Từ đó, ta có thể phát biểu ý nghĩa cơ học của đạo hàm như sau :

Vận tốc tức thời $v(t_0)$ tại thời điểm t_0 (hay vận tốc tại t_0) của một chuyển động có phương trình $s = s(t)$ bằng đạo hàm của hàm số $s = s(t)$ tại điểm t_0, tức là

$$v(t_0) = s'(t_0).$$

Chẳng hạn, trong ví dụ mở đầu, ta có

$$f(t) - f(t_0) = \frac{1}{2}g\left[t^2 - t_0^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}g\left(t + t_0\right)\left(t - t_0\right).$$

Do đó đạo hàm của hàm số $y = f(t)$ là

$$f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

$$= \lim_{t \to t_0} \frac{1}{2}g\left(t + t_0\right) = gt_0.$$

Vậy vận tốc của viên bi tại t_0 là $v(t_0) = f'(t_0) = gt_0$.

H3 *Một chất điểm chuyển động có phương trình $s = t^2$ (t tính bằng giây, s tính bằng mét). Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t_0 = 2$ (giây) bằng :*

(A) 2 *m/s* ; (B) 3 *m/s* ; (C) 4 *m/s* ; (D) 5 *m/s*.

Chọn kết quả đúng trong các kết quả trên.

5. Đạo hàm của hàm số trên một khoảng

a) Khái niệm

Cho hàm số f xác định trên tập J, trong đó J là một khoảng hoặc là hợp của những khoảng nào đó. Ta có định nghĩa sau đây.

ĐỊNH NGHĨA

1) Hàm số f gọi là **có đạo hàm trên J** nếu nó có đạo hàm $f'(x)$ tại mọi điểm x thuộc J.

2) Nếu hàm số f có đạo hàm trên J thì hàm số f' xác định bởi $f' : \begin{array}{l} J \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) \end{array}$ gọi là **đạo hàm của hàm số f**.

Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ cũng được kí hiệu bởi y'.

Ví dụ 3. Tìm đạo hàm của hàm số $y = x^3$ trên khoảng $(-\infty ; +\infty)$.

Giải

Với mọi x thuộc khoảng $(-\infty ; +\infty)$ ta có :

• $\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = \Delta x\,(3x^2 + 3x.\Delta x + \Delta x^2)$;

• $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x.\Delta x + \Delta x^2) = 3x^2$.

Vậy hàm số $y = x^3$ có đạo hàm trên khoảng $(-\infty ; +\infty)$ và $y' = 3x^2$. □

H4 *a) Chứng minh rằng hàm số hằng $y = c$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Tìm đạo hàm đó.*

b) Chứng minh rằng hàm số $y = x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Tìm đạo hàm đó.

b) Đạo hàm của một số hàm số thường gặp

Ta có định lí sau :

ĐỊNH LÍ

a) Hàm số hằng $y = c$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $y' = 0$;

b) Hàm số $y = x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $y' = 1$;

c) Hàm số $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $y' = nx^{n-1}$;

d) Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm trên khoảng $(0 ; +\infty)$ và $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Chứng minh

Qua hoạt động **H4**, ta đã chứng minh các kết luận a) và b). Sau đây ta chứng minh hai kết luận còn lại.

c) Với mỗi x thuộc $\mathbb{R}$ ta tính đạo hàm của hàm số tại điểm x theo định nghĩa :

• Tính Δy : Áp dụng công thức nhị thức Niu-tơn đối với $(x + \Delta x)^n$, ta có

$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = C_n^1 x^{n-1}\Delta x + C_n^2 x^{n-2}\Delta x^2 + ... + C_n^{n-1} x\Delta x^{n-1} + \Delta x^n$.

• Tìm giới hạn (chú ý rằng $C_n^1 = n$)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2}\Delta x + ... + C_n^{n-1} x\Delta x^{n-2} + \Delta x^{n-1}\right)$$
$$= nx^{n-1}.$$

Vậy hàm số đã cho có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $y' = nx^{n-1}$.

d) Với mỗi x thuộc khoảng $(0 ; +\infty)$ ta có :

• $\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} = \dfrac{\left(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$

$$= \frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}.$$

• $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$

Vậy hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm trên khoảng $(0 ; +\infty)$ và $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. □

CHÚ Ý

Hàm số $y = |x|$ xác định tại $x = 0$, tuy nhiên người ta chứng minh được rằng nó không có đạo hàm tại điểm $x = 0$.

Ví dụ 4

a) Tìm đạo hàm của hàm số $y = x^4$.

b) Tìm đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$ tại điểm $x = 9$.

Giải

a) Với $y = x^4$, ta có $y' = 4x^3$ (với mọi $x \in \mathbb{R}$).

b) Với $y = \sqrt{x}$, ta có $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (với mọi $x \in (0 ; +\infty)$).

Do đó $y'(9) = \dfrac{1}{2\sqrt{9}} = \dfrac{1}{6}$. □

H5 *Cho hàm số $y = f(x)$. Tính $f'(-1)$ và $f'(1)$ (nếu có) trong mỗi trường hợp sau :*

a) $f(x) = x^{10}$; b) $f(x) = \sqrt{x}$.

Câu hỏi và bài tập

1. Tìm số gia của hàm số $y = x^2 - 1$ tại điểm $x_0 = 1$ ứng với số gia Δx, biết

a) $\Delta x = 1$; b) $\Delta x = -0,1$.

2. Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của mỗi hàm số sau tại điểm x_0.

a) $y = 2x + 1, x_0 = 2$; b) $y = x^2 + 3x$, $x_0 = 1$.

3. Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của mỗi hàm số sau tại điểm x_0 (a là hằng số).

a) $y = ax + 3$; b) $y = \frac{1}{2}ax^2$.

4. Cho parabol $y = x^2$ và hai điểm $A(2 ; 4)$ và $B(2 + \Delta x ; 4 + \Delta y)$ trên parabol đó.

a) Tính hệ số góc của cát tuyến AB biết Δx lần lượt bằng 1 ; 0,1 và 0,01.

b) Tính hệ số góc của tiếp tuyến của parabol đã cho tại điểm A.

5. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$, biết

a) Tiếp điểm có hoành độ bằng -1 ;

b) Tiếp điểm có tung độ bằng 8 ;

c) Hệ số góc của tiếp tuyến bằng 3.

6. Một vật rơi tự do có phương trình chuyển động là $S = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g = 9,8$ m/s^2 và t được tính bằng giây (s).

a) Tìm vận tốc trung bình trong khoảng thời gian từ t đến $t + \Delta t$ với độ chính xác 0,001, biết $t = 5$ và Δt lần lượt bằng 0,1 ; 0,01 ; 0,001.

b) Tìm vận tốc tại thời điểm t = 5.

7. Tìm đạo hàm của hàm số $f(x) = x^5$ trên $\mathbb{R}$ rồi suy ra $f'(-1), f'(-2)$ và $f'(2)$.

8. Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau trên $\mathbb{R}$.

a) $y = ax^2$ (a là hằng số) ; b) $y = x^3 + 2$.

9. Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau.

a) $y = \frac{1}{2x - 1}$ với $x \neq \frac{1}{2}$; b) $y = \sqrt{3 - x}$ với $x < 3$.

Bài đọc thêm

ĐẠO HÀM MỘT BÊN

Ta đã biết rằng đạo hàm của hàm số f tại điểm x_0 là giới hạn sau đây

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \qquad (1)$$

Nếu thay vì xét giới hạn (1), ta xét giới hạn một bên của cùng biểu thức đó thì giới hạn một bên ấy sẽ được gọi là *đạo hàm một bên* của hàm số đã cho tại điểm x_0.

1. Khái niệm đạo hàm một bên tại một điểm

Định nghĩa. Cho hàm số f xác định trên nửa khoảng $[x_0 ; b)$. Giới hạn bên phải (nếu có) của tỉ số $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ khi x dần đến x_0 được gọi là ***đạo hàm bên phải*** của hàm số đã cho tại điểm x_0, kí hiệu là $f'(x_0^+)$ hoặc $y'(x_0^+)$.

$$f'(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Đạo hàm bên trái của hàm số f xác định trên nửa khoảng $(a ; x_0]$, kí hiệu là $f'(x_0^-)$ hoặc $y'(x_0^-)$, cũng được định nghĩa tương tự, nghĩa là

$$f'(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Đạo hàm bên trái và đạo hàm bên phải được gọi chung là *đạo hàm một bên*.

➢ Từ định nghĩa và các kết quả đã biết về giới hạn một bên, ta dễ dàng suy ra :

1) Nếu hàm số f xác định trên khoảng $(a ; b)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thuộc khoảng đó thì nó cũng có đạo hàm bên phải và bên trái tại x_0, và $f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = f'(x_0)$.

2) Ngược lại, nếu hàm số f xác định trên khoảng $(a ; b)$ có đạo hàm bên phải và đạo hàm bên trái tại điểm x_0 sao cho $f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$ thì nó cũng có đạo hàm tại x_0.

3) Tuy nhiên, một hàm số có đạo hàm bên phải và đạo hàm bên trái tại điểm x_0 vẫn có thể không có đạo hàm tại điểm x_0 (khi $f'(x_0^+) \neq f'(x_0^-)$).

➢ Sau đây là một số ví dụ.

Ví dụ 1. Xét hàm số $y = x^2$. Dễ thấy hàm số có đạo hàm tại $x = 3$, do đó nó có đạo hàm bên phải, đạo hàm bên trái tại $x = 3$ và

$$y'(3^+) = y'(3^-) = y'(3) = 6. \qquad \square$$

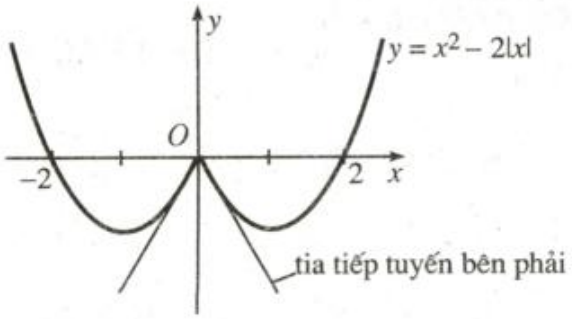
Ví dụ 2. Xét hàm số $f(x) = x^2 - 2|x|$.

Ta có :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 2x}{x} = -2,$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 + 2x}{x} = 2.$$

Do đó tại điểm $x = 0$, hàm số f có đạo hàm bên phải $f'(0^+) = -2$ và đạo hàm bên trái $f'(0^-) = 2$, nhưng không có đạo hàm tại điểm đó. □



Hình 5.3

➢ Cùng với khái niệm đạo hàm một bên, người ta còn xây dựng khái niệm *tia tiếp tuyến một bên* của một đường cong tại một điểm. Tia tiếp tuyến bên phải của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm M_0 có hoành độ x_0 có hệ số góc bằng đạo hàm bên phải $f'(x_0^+)$. Điều tương tự cũng xảy ra đối với tia tiếp tuyến bên trái (h.5.3).

Nếu tại điểm x_0 hàm số f có đạo hàm bên phải và đạo hàm bên trái, nhưng chúng không bằng nhau thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ gọi là *gãy* tại điểm $M_0\,(x_0 ; f(x_0))$.

2. Đạo hàm của hàm số trên một nửa khoảng hay một đoạn

Định nghĩa. Cho hàm số f xác định trên tập K, trong đó, K là một nửa khoảng hay một đoạn.

Hàm số f gọi là có đạo hàm trên nửa khoảng $K = [a ; b)$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm thuộc khoảng $(a ; b)$ và có đạo hàm bên phải tại a.

(Tương tự nếu $K = [a ; +\infty)$).

Hàm số f gọi là có đạo hàm trên nửa khoảng $K = (a ; b]$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm thuộc khoảng $(a ; b)$ và có đạo hàm bên trái tại b.

(Tương tự nếu $K = (-\infty ; b]$).

Hàm số f gọi là có đạo hàm trên đoạn $K = [a ; b]$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm thuộc khoảng $(a ; b)$, có đạo hàm bên phải tại a và đạo hàm bên trái tại b.

Ví dụ 3. Hàm số $y = |x|$ có đạo hàm bằng 1 trên nửa khoảng $[0 ; +\infty)$ và có đạo hàm bằng -1 trên nửa khoảng $(-\infty ; 0]$.

Luyện tập

10. a) Tính $f'(3)$ và $f'(-4)$ nếu $f(x) = x^3$.

b) Tính $f'(1)$ và $f'(9)$ nếu $f(x) = \sqrt{x}$.

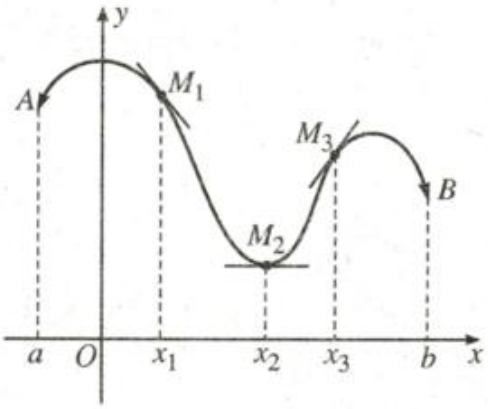
11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 và đồ thị (G). Mệnh đề sau đây đúng hay sai ?

a) Nếu $f'(x_0) = 0$ thì tiếp tuyến của (G) tại điểm $M(x_0 ; f(x_0))$ song song với trục hoành.

b) Nếu tiếp tuyến của (G) tại điểm $M(x_0 ; f(x_0))$ song song với trục hoành thì $f'(x_0) = 0$.

12. Hình 5.4 là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(a ; b)$. Biết rằng tại các điểm M_1, M_2 và M_3, đồ thị hàm số có tiếp tuyến được thể hiện trên hình vẽ.

Dựa vào hình vẽ, em hãy nêu nhận xét về dấu của $f'(x_1)$, $f'(x_2)$ và $f'(x_3)$.



Hình 5.4

13. Chứng minh rằng để đường thẳng $y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $(x_0 ; f(x_0))$, điều kiện cần và đủ là $\begin{cases} a = f'(x_0) \\ ax_0 + b = f(x_0). \end{cases}$

14. Cho hàm số $y = |x|$.

a) Chứng minh rằng hàm số đã cho liên tục tại điểm $x = 0$.

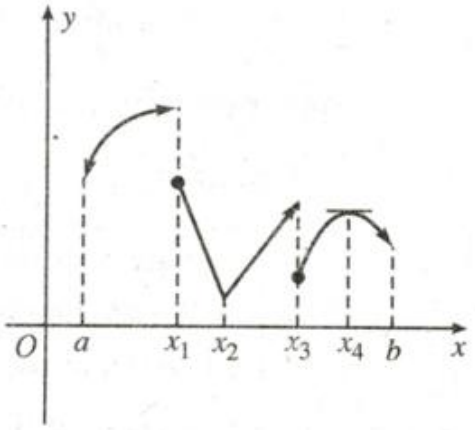
b) Tính đạo hàm của hàm số tại $x = 0$, nếu có.

c) Mệnh đề "Hàm số liên tục tại điểm x_0 thì có đạo hàm tại x_0" đúng hay sai ?

15. Hình 5.5 là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a ; b)$. Dựa vào hình vẽ, hãy cho biết tại mỗi điểm x_1, x_2, x_3 và x_4 :

a) Hàm số có liên tục hay không ?

b) Hàm số có đạo hàm hay không ? Hãy tính đạo hàm nếu có.



Hình 5.5

Em có biết

MỘT SỐ CHUYỂN ĐỘNG CÓ VẬN TỐC LỚN

* Vận tốc âm thanh : khoảng 343m/s.

* Vận tốc chuyển động của vệ tinh cách Trái Đất 200km : 22km/s.

* Vận tốc chuyển động của Trái Đất quanh Mặt Trời : 30km/s.

* Vận tốc ánh sáng : 300 000km/s.

* Vận tốc máy bay E-bớt (Airbus) : 270m/s.

* Vận tốc tên lửa đưa người lên vũ trụ : khoảng 11km/s.