§ 3 MỘT SỐ DẠNG PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC ĐƠN GIẢN

1. Phương trình bậc nhất và bậc hai đối với một hàm số lượng giác

Trong mục này, ta xét các phương trình có dạng như : $\sqrt{3}\tan 2x + 3 = 0$ (phương trình bậc nhất đối với $\tan 2x$), hay $2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0$ (phương trình bậc hai đối với $\sin x$), ...

Để giải các phương trình dạng này, ta chọn một biểu thức lượng giác thích hợp có mặt trong phương trình làm ẩn phụ và quy về phương trình bậc nhất hoặc bậc hai đối với ẩn phụ đó (có thể nêu hoặc không nêu kí hiệu ẩn phụ).

a) Phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau :

1) $\sqrt{3}\tan 2x + 3 = 0$; 2) $\cos(x + 30^\circ) + 2\cos^2 15^\circ = 1$.

Giải

1) $\sqrt{3}\tan 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \tan 2x = -\dfrac{3}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan 2x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan 2x = \tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}.$$

2) Để ý rằng : $1 - 2\cos^2 15^\circ = -\cos 30^\circ = \cos 150^\circ$, ta có

$\cos(x + 30^\circ) + 2\cos^2 15^\circ = 1 \Leftrightarrow \cos(x + 30^\circ) = 1 - 2\cos^2 15^\circ$

$$\Leftrightarrow \cos(x + 30^\circ) = \cos 150^\circ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 30^\circ = 150^\circ + k360^\circ \\ x + 30^\circ = -150^\circ + k360^\circ \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 120^\circ + k360^\circ \\ x = -180^\circ + k360^\circ. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x = 120^\circ + k360^\circ$ và $x = -180^\circ + k360^\circ$ (riêng họ nghiệm thứ hai cũng có thể viết là $x = 180^\circ + k360^\circ$). □

b) Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau :

1) $2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0$; 2) $\cot^2 3x - \cot 3x - 2 = 0$.

Giải

1) Đặt $\sin x = t$ (với $|t| \le 1$), ta được phương trình $2t^2 + 5t - 3 = 0$. Phương trình này có hai nghiệm là $t_1 = -3$ và $t_2 = \frac{1}{2}$, trong đó t_1 bị loại do không thoả mãn điều kiện $|t| \le 1$. Do đó

$$2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ và $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$.

2) Đặt $\cot 3x = t$, ta có phương trình $t^2 - t - 2 = 0$. Phương trình này có hai nghiệm là $t = -1$ và $t = 2$. Do đó

$$\cot^2 3x - \cot 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cot 3x = -1, \\ \cot 3x = 2. \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \\ 3x = \operatorname{arccot} 2 + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3} \\ x = \frac{1}{3}\operatorname{arccot} 2 + k\frac{\pi}{3}. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là

$$x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3} \text{ và } x = \frac{1}{3}\operatorname{arccot} 2 + k\frac{\pi}{3}.$$ □

H1 *Giải phương trình* $4\cos^2 x - 2\left(1 + \sqrt{2}\right)\cos x + \sqrt{2} = 0$.

Ví dụ 3. Giải phương trình $2\cos 2x + 2\cos x - \sqrt{2} = 0$.

Giải

$2\cos 2x + 2\cos x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow 2(2\cos^2 x - 1) + 2\cos x - \sqrt{2} = 0$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 x + 2\cos x - (2 + \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x = -\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}. \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi$$

(phương trình $\cos x = -\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ vô nghiệm vì $-\dfrac{1+\sqrt{2}}{2} < -1$).

Kết luận : Phương trình đã cho có các nghiệm là $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k2\pi$. □

H2 *Giải phương trình* $5\tan x - 2\cot x - 3 = 0$ *rồi biểu diễn các nghiệm trên đường tròn lượng giác.*

2. Phương trình bậc nhất đối với sin *x* và cos *x*

Trong mục này, chúng ta sẽ nghiên cứu cách giải các phương trình dạng

$$a\sin x + b\cos x = c,$$

trong đó *a*, *b* và *c* là những số đã cho với *a* khác 0 hoặc *b* khác 0. Chúng được gọi là **phương trình bậc nhất đối với sin *x* và cos *x*.**

H3 *Sử dụng đẳng thức* $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$*, hãy giải phương trình* $\sin x + \cos x = 1$.

Để giải phương trình $a\sin x + b\cos x = c$ *(a, b khác 0) ta biến đổi biểu thức* $a\sin x + b\cos x$ *thành dạng* $C\sin(x + \alpha)$ *hoặc dạng* $C\cos(x + \gamma)$ *(*C, α, γ *là những hằng số).*

Ví dụ 4. Giải phương trình

$$\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1. \qquad (1)$$

Giải

Ta có

$$\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right) = 2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{6} - \cos x\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

Vậy (1) $\Leftrightarrow \sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\dfrac{\pi}{6}$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi, \\ x = \pi + k2\pi. \end{array}\right.$$ □

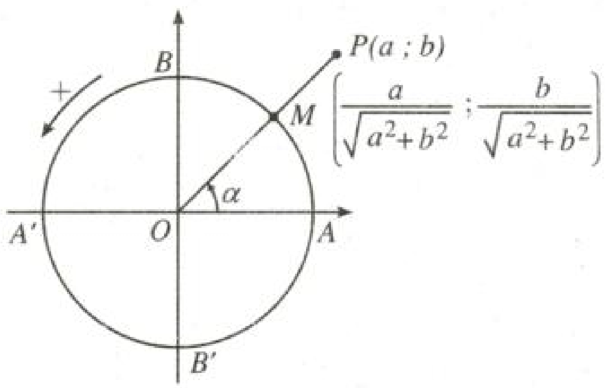
Một cách tổng quát ta có thể biến đổi biểu thức $a\sin x + b\cos x = c$ (a và b khác 0) thành dạng $C\sin(x + \alpha) = c$ như sau :

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos x\right).$$

Do

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1,$$

nên điểm M với toạ độ $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} ; \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$ nằm trên đường tròn lượng giác (xem cách dựng điểm M trong hình 1.25).



Hình 1.25

Vậy có số α để $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ và $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Từ đó ta có

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\,(\cos\alpha\sin x + \sin\alpha\cos x) = \sqrt{a^2 + b^2}\,\sin(x + \alpha).$$

Bằng cách biến đổi như thế, việc giải phương trình $a\sin x + b\cos x = c$ được đưa về giải phương trình lượng giác cơ bản $\sin(x + \alpha) = \dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

CHÚ Ý

Nếu trong phép biến đổi trên, ta chọn số β để $\sin\beta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

$\cos\beta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ thì ta có

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\beta).$$

Ví dụ 5. Giải phương trình

$$2\sin 3x + \sqrt{5}\cos 3x = -3. \qquad (2)$$

Giải

Ta có

$$2\sin 3x + \sqrt{5}\cos 3x = \sqrt{2^2+(\sqrt{5})^2}\left(\frac{2}{3}\sin 3x + \frac{\sqrt{5}}{3}\cos 3x\right)$$

$$= 3(\sin\beta\sin 3x + \cos\beta\cos 3x),$$

trong đó $\sin\beta = \dfrac{2}{3}$ và $\cos\beta = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Do đó (2) $\Leftrightarrow 3\cos(3x-\beta) = -3 \quad \Leftrightarrow \cos(3x-\beta) = -1$

$$\Leftrightarrow 3x - \beta = \pi + k2\pi \quad \Leftrightarrow x = \frac{\beta+\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}. \qquad \square$$

H4 *Với giá trị nào của* m *thì phương trình* $2\sin 3x + \sqrt{5}\cos 3x = m$ *có nghiệm ?*

3. Phương trình thuần nhất bậc hai đối với sin*x* và cos*x*

Trong mục này, chúng ta sẽ nghiên cứu cách giải phương trình dạng

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0,$$

trong đó a, b và c là những số đã cho, với $a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$ hoặc $c \neq 0$. Chúng được gọi là **phương trình thuần nhất bậc hai đối với sin*x* và cos*x***.

Để giải phương trình dạng này, ta chia hai vế cho $\cos^2 x$ *(với điều kiện* $\cos x \neq 0$*) để đưa về phương trình đối với* $\tan x$, *hoặc chia hai vế cho* $\sin^2 x$ *(với điều kiện* $\sin x \neq 0$*) để đưa về phương trình đối với* $\cot x$.

Ví dụ 6. Giải phương trình

$$4\sin^2 x - 5\sin x\cos x - 6\cos^2 x = 0. \qquad (3)$$

Giải

Khi $\cos x = 0$ thì $\sin x = \pm 1$ nên dễ thấy các giá trị của x mà $\cos x = 0$ không phải là nghiệm của (3).

Vậy chia hai vế của (3) cho $\cos^2 x$, ta được phương trình tương đương

$$4\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 5\frac{\sin x}{\cos x} - 6 = 0.$$

Do đó

$$(3) \Leftrightarrow 4\tan^2 x - 5\tan x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 2, \\ \tan x = -\dfrac{3}{4} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arctan 2 + k\pi \\ x = \arctan\left(-\dfrac{3}{4}\right) + k\pi. \end{array}\right.$$

Vậy các nghiệm của phương trình (3) là

$$x = \arctan 2 + k\pi \text{ và } x = \arctan\left(-\frac{3}{4}\right) + k\pi. \qquad \square$$

H5 *Giải phương trình* (3) *bằng cách chia hai vế cho* $\sin^2 x$.

Nhận xét

1) Phương trình $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$ khi $a = 0$ hoặc $c = 0$ có thể được giải gọn hơn bằng cách đưa về phương trình tích. Chẳng hạn, đối với phương trình $\sqrt{3}\sin^2 x - \sin x\cos x = 0$, ta có

$$\sqrt{3}\sin^2 x - \sin x\cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x(\sqrt{3}\sin x - \cos x) = 0.$$

2) Đối với phương trình

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d \; (a, b, c, d \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 + c^2 \neq 0) \qquad (4)$$

ta có thể quy về giải phương trình thuần nhất bậc hai đối với $\sin x$ và $\cos x$ bằng cách viết d dưới dạng $d = d(\sin^2 x + \cos^2 x)$.

Chẳng hạn, đối với phương trình $2\sin^2 x - 5\sin x\cos x - \cos^2 x = -2$, ta có thể làm như sau :

$$2\sin^2 x - 5\sin x\cos x - \cos^2 x = -2$$
$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - 5\sin x\cos x - \cos^2 x = -2\,(\sin^2 x + \cos^2 x)$$
$$\Leftrightarrow 4\sin^2 x - 5\sin x\cos x + \cos^2 x = 0.$$

Ngoài ra ta cũng có thể quy phương trình (4) về phương trình bậc nhất đối với $\sin 2x$ và $\cos 2x$ bằng cách sử dụng các công thức hạ bậc và công thức nhân đôi :

$$2\sin^2 x = 1 - \cos 2x,\quad 2\cos^2 x = 1 + \cos 2x,\quad 2\sin x\cos x = \sin 2x.$$

Chẳng hạn,

$$2\sin^2 x - 5\sin x\cos x - \cos^2 x = -2$$
$$\Leftrightarrow (1 - \cos 2x) - \frac{5}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) = -2$$
$$\Leftrightarrow 3\cos 2x + 5\sin 2x = 5.$$

H6 *Giải phương trình* $\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 1$ *bằng hai cách đã nêu trên.*

4. Một số ví dụ khác

Thực tế, chúng ta còn gặp nhiều phương trình lượng giác mà khi giải cần phải thực hiện các phép biến đổi lượng giác thích hợp để đưa chúng về các phương trình dạng quen thuộc. Trong mục này, chúng ta chỉ nêu một số ví dụ đơn giản.

Ví dụ 7. Giải phương trình

$$\sin 2x \sin 5x = \sin 3x \sin 4x. \qquad (4)$$

Giải

Sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng, ta có

$$(4) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 3x - \cos 7x) = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 7x)$$
$$\Leftrightarrow \cos 3x = \cos x \Leftrightarrow 3x = \pm x + k2\pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi, \\ x = k\dfrac{\pi}{2}. \end{array}\right.$$

Kết luận : Phương trình đã cho có các nghiệm là $x = k\pi$ và $x = k\frac{\pi}{2}$. (Dễ thấy họ nghiệm $x = k\frac{\pi}{2}$ bao gồm cả họ nghiệm $x = k\pi$ nên có thể nói phương trình (4) có các nghiệm là $x = k\frac{\pi}{2}$). □

Ví dụ 8. Để giải phương trình

$$\sin^2 x + \sin^2 3x = 2\sin^2 2x, \quad (5)$$

ta có thể sử dụng công thức hạ bậc và công thức biến đổi tổng thành tích. Cụ thể ta có

$$(5) \Leftrightarrow \frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 6x}{2} = 1 - \cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + \cos 6x = 2\cos 4x \Leftrightarrow 2\cos 4x \cos 2x - 2\cos 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 4x\,(\cos 2x - 1) = 0. \quad (6)$$

H7 *Giải tiếp phương trình (6) rồi kết luận về nghiệm của phương trình (5).*

Chú ý rằng khi giải phương trình lượng giác, ta cần lưu ý đến điều kiện xác định của nó để loại bỏ các nghiệm ngoại lai.

Ví dụ 9. Giải phương trình $\tan 3x = \tan x$.

Giải

Với điều kiện $\cos 3x \neq 0$ và $\cos x \neq 0$, ta có

$$\tan 3x = \tan x \Leftrightarrow 3x = x + k\pi \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}.$$

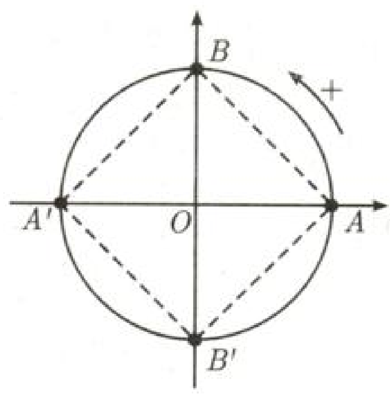
Để là nghiệm của phương trình đã cho, các giá trị $k\frac{\pi}{2}$ của x còn phải thoả mãn các điều kiện $\cos 3x \neq 0$ và $\cos x \neq 0$. Để kiểm tra các điều kiện này, ta có thể làm như sau : Các giá trị $x = k\frac{\pi}{2}$ gồm có bốn họ (h. 1.26) :

(A) : $x = k2\pi$ (ứng với điểm A) ;

(B) : $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ (ứng với điểm B) ;

(A') : $x = \pi + k2\pi$ (ứng với điểm A') ;

(B') : $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ (ứng với điểm B').



Hình 1.26

Bằng cách thử trực tiếp, dễ thấy các họ (A) và (A') thoả mãn, còn (B) và (B') không thoả mãn các điều kiện $\cos 3x \neq 0$ và $\cos x \neq 0$. Vậy phương trình $\tan 3x = \tan x$ có các nghiệm là $x = \pi + k2\pi$ và $x = k2\pi$ (hay còn có thể viết gọn là $x = k\pi$). □

H8 *Giải phương trình* $\cot 2x = \cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu hỏi và bài tập

27. Giải các phương trình sau :

a) $2\cos x - \sqrt{3} = 0$; b) $\sqrt{3}\tan 3x - 3 = 0$;

c) $(\sin x + 1)(2\cos 2x - \sqrt{2}) = 0$.

28. Giải các phương trình sau :

a) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$; b) $\cos^2 x + \sin x + 1 = 0$;

c) $\sqrt{3}\tan^2 x - (1 + \sqrt{3})\tan x + 1 = 0$.

29. Giải các phương trình sau trên khoảng đã cho rồi dùng bảng số hoặc máy tính bỏ túi để tính gần đúng nghiệm của chúng (tính chính xác đến hàng phần trăm) :

a) $3\cos 2x + 10\sin x + 1 = 0$ trên $\left(-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right)$;

b) $4\cos 2x + 3 = 0$ trên $\left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$;

c) $\cot^2 x - 3\cot x - 10 = 0$ trên $(0 ; \pi)$;

d) $5 - 3\tan 3x = 0$ trên $\left(-\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{6}\right)$.

30. Giải các phương trình sau :

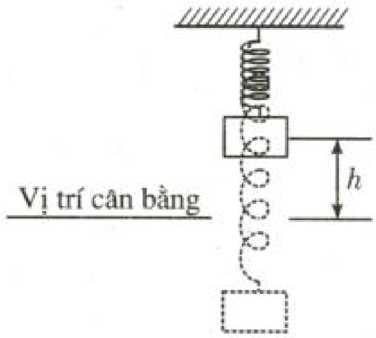
a) $3\cos x + 4\sin x = -5$;

b) $2\sin 2x - 2\cos 2x = \sqrt{2}$;

c) $5\sin 2x - 6\cos^2 x = 13$.

31. Một vật nặng treo bởi một chiếc lò xo, chuyển động lên xuống qua vị trí cân bằng (h. 1.27). Khoảng cách h từ vật đó đến vị trí cân bằng ở thời điểm t giây được tính theo công thức $h = |d|$ trong đó

$$d = 5\sin 6t - 4\cos 6t,$$



Hình 1.27

với d được tính bằng xentimet, ta quy ước rằng $d > 0$ khi vật ở phía trên vị trí cân bằng, $d < 0$ khi vật ở phía dưới vị trí cân bằng. Hỏi :

a) Ở vào thời điểm nào trong 1 giây đầu tiên, vật ở vị trí cân bằng ?

b) Ở vào thời điểm nào trong 1 giây đầu tiên, vật ở xa vị trí cân bằng nhất ?

(Tính chính xác đến $\frac{1}{100}$ giây).

32. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mỗi biểu thức sau :

a) $a\sin x + b\cos x$ (a và b là hằng số, $a^2 + b^2 \neq 0$) ;

b) $\sin^2 x + \sin x\cos x + 3\cos^2 x$;

c) $A\sin^2 x + B\sin x\cos x + C\cos^2 x$ (A, B và C là hằng số).

33. Giải các phương trình sau :

a) $2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2 x = 4$;

b) $3\sin^2 x + 4\sin 2x + (8\sqrt{3} - 9)\cos^2 x = 0$;

c) $\sin^2 x + \sin 2x - 2\cos^2 x = \frac{1}{2}$.

34. Sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích hoặc tích thành tổng để giải các phương trình sau :

a) $\cos x\cos 5x = \cos 2x\cos 4x$;

b) $\cos 5x\sin 4x = \cos 3x\sin 2x$;

c) $\sin 2x + \sin 4x = \sin 6x$;

d) $\sin x + \sin 2x = \cos x + \cos 2x$.

35. Dùng công thức hạ bậc để giải các phương trình sau :

a) $\sin^2 4x + \sin^2 3x = \sin^2 2x + \sin^2 x$;

b) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$.

36. Giải các phương trình sau :

a) $\tan\frac{x}{2} = \tan x$;

b) $\tan(2x + 10^\circ) + \cot x = 0$;

c) $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$;

d) $\tan x + \tan 2x = \sin 3x\cos x$;

e) $\tan x + \cot 2x = 2\cot 4x$.

Bài đọc thêm

BẤT PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

• Trước hết, ta xét bài toán sau :

Hàng ngày, mực nước của một con kênh lên xuống theo thuỷ triều. Độ sâu h (mét) của mực nước trong kênh tính theo thời gian t (giờ) trong một ngày ($0 \le t < 24$) cho bởi công thức

$$h = 3\cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) + 12.$$

Hỏi tàu lớn có thể qua lại trên kênh trong khoảng thời gian nào trong ngày, biết rằng tàu lớn chỉ có thể đi được qua kênh khi độ sâu của nước là trên 11 mét ?

Để giải bài toán này, ta phải tìm các giá trị của t ($0 \le t < 24$) thoả mãn

$$3\cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) + 12 > 11. \qquad (1)$$

Như vậy, ta phải giải bất phương trình (1). Đó là một bất phương trình lượng giác.

Dễ thấy (1) tương đương với bất phương trình $\cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) > -\frac{1}{3}$; và nếu đặt $x = \frac{\pi t}{6} + 1$ thì bất phương trình này có dạng

$$\cos x > -\frac{1}{3}. \qquad (2)$$

• Nói chung, việc giải một bất phương trình lượng giác được quy về giải các bất phương trình lượng giác có một trong các dạng

$$f(x) < m, f(x) \ge m, f(x) > m, f(x) \le m, \qquad (3)$$

trong đó m là một số cho trước, $f(x)$ là $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ hoặc $\cot x$. Các bất phương trình này gọi là các **bất phương trình lượng giác cơ bản**.

• Dựa vào tính chất tuần hoàn của các hàm số lượng giác, ta có thể giải một bất phương trình lượng giác cơ bản dạng (3) theo hai bước sau :

– *Bước 1*. Tìm nghiệm của bất phương trình trên một đoạn bất kì nào đó, chỉ cần đoạn đó có độ dài bằng chu kì của hàm số $y = f(x)$. Bước này có thể thực hiện bằng cách sử dụng đồ thị hoặc đường tròn lượng giác (xem ví dụ 1).

– *Bước 2.* Mở rộng kết quả lên toàn trục số bằng cách tịnh tiến miền nghiệm thu được ở bước 1 sang phải, sang trái những đoạn có độ dài bằng bội nguyên dương của chu kì. Bước này có thể tiến hành dựa vào nhận xét sau :

Cho $y = f(x)$ là hàm số tuần hoàn với chu kì T. Nếu bất phương trình $f(x) < m$ (hoặc $f(x) > m$, $f(x) \geq m$, $f(x) \leq m$) nghiệm đúng với mọi x thuộc khoảng $(a\ ;\ b)$ thì bất phương trình đó cũng nghiệm đúng với mọi x thuộc mỗi khoảng $(a + kT\ ;\ b + kT)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 1. Giải bất phương trình

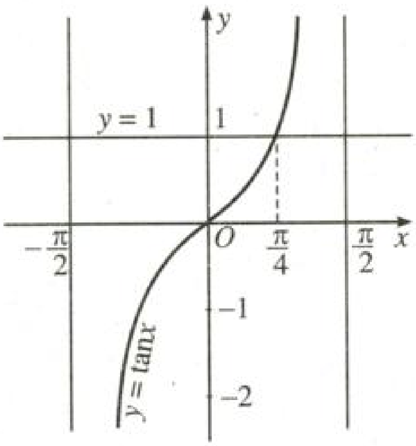
$$\tan x < 1. \qquad (4)$$

Phương pháp giải như sau :

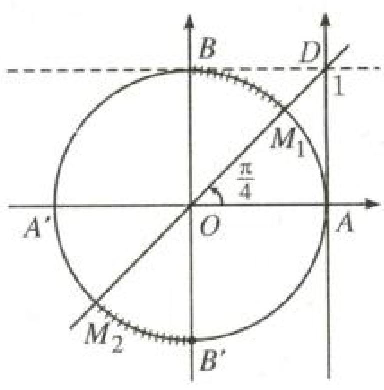
Bước 1. Hàm số $y = \tan x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì π nên trước hết ta tìm nghiệm của (4) trên một đoạn có độ dài π, chẳng hạn trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$. Có hai cách :

Cách 1 (sử dụng đồ thị). Trên cùng một mặt phẳng toạ độ, ta vẽ đồ thị của hàm số $y = \tan x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ và đường thẳng $y = 1$ (h. 1.28). Từ đó, dễ thấy trên đoạn ấy, bất phương trình $\tan x < 1$ có nghiệm là

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}. \qquad (5)$$



Hình 1.28



Hình 1.29

Cách 2 (sử dụng đường tròn lượng giác). Trên trục tang, chọn điểm D sao cho $\overline{AD} = 1$. Đường thẳng OD cắt đường tròn lượng giác tại M_1 và M_2 (h. 1.29). Để xác định nghiệm của bất phương trình trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, ta chỉ chú ý nửa đường tròn bên phải trục tung. Dễ thấy rằng nghiệm của bất phương trình $\tan x < 1$ là số đo radian của các cung lượng giác (trên nửa đường tròn đang xét) có điểm cuối M thuộc cung tròn $\overset{\frown}{B'AM_1}$. Suy ra $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}$.

Bước 2. Sử dụng nhận xét trên, ta suy ra nghiệm của bất phương trình $\tan x < 1$ là

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi. \qquad \square$$

Ví dụ 2. Giải bất phương trình (2) :

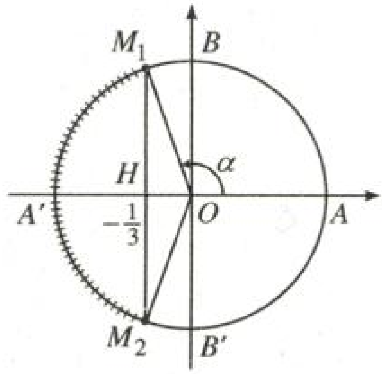
$$\cos x > -\frac{1}{3}.$$

Giải

Vì hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kì 2π nên trước hết ta tìm nghiệm của (2) trên đoạn $[-\pi ; \pi]$.

Trên trục côsin, ta chọn điểm H sao cho $\overline{OH} = -\frac{1}{3}$.

Gọi M_1 và M_2 là hai giao điểm của đường tròn lượng giác với đường thẳng đi qua H và vuông góc với trục côsin (h. 1.30). Dễ thấy rằng nghiệm của bất phương trình (2) là số đo radian của các cung lượng giác có điểm cuối M thuộc cung tròn $\overset{\frown}{M_2AM_1}$.



Hình 1.30

Gọi α là số đo rađian của cung tròn $\overset{\frown}{ABM_1}$ $(0 \le \alpha \le \pi$ và $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$; dùng máy tính, ta tính được $\alpha \approx 1{,}911)$. Khi đó, trên đoạn $[-\pi ; \pi]$, bất phương trình (2) có nghiệm là $-\alpha < x < \alpha$.

Mở rộng kết quả này lên toàn trục số, ta được tất cả các nghiệm của (2) là

$$-\alpha + k2\pi < x < \alpha + k2\pi \text{ (với } \alpha \approx 1{,}911). \qquad \square$$

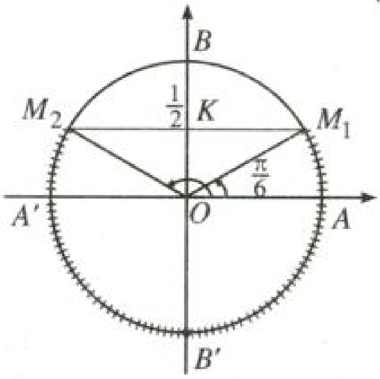
Ví dụ 3. Giải bất phương trình

$$\sin x > 0{,}5. \qquad (6)$$

Giải

Vì hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kì 2π nên trước hết ta tìm nghiệm của (6) trên đoạn $[0 ; 2\pi]$. Trên đoạn ấy, bất phương trình $\sin x > 0{,}5$ có nghiệm là $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ (h. 1.31). (Có thể sử dụng một trong hai cách nêu trên để suy ra kết quả này). Do đó

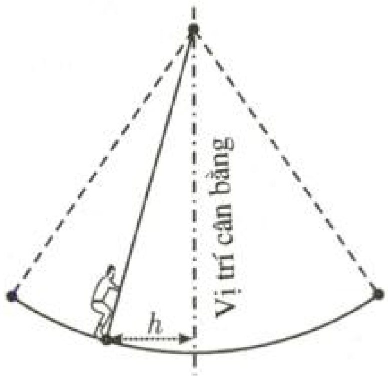
$$\sin x > 0{,}5 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + k2\pi < x < \frac{5\pi}{6} + k2\pi. \quad \square$$



Hình 1.31

Luyện tập

37. Mùa xuân ở Hội Lim (tỉnh Bắc Ninh) thường có trò chơi đu. Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động qua lại vị trí cân bằng. Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách h (tính bằng mét) từ người chơi đu đến vị trí cân bằng (h. 1.32) được biểu diễn qua thời gian t ($t \geq 0$ và được tính bằng giây) bởi hệ thức $h = |d|$ với $d = 3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]$, trong đó ta quy ước rằng $d > 0$ khi vị trí cân bằng ở về phía sau lưng người chơi đu và $d < 0$ trong trường hợp trái lại.



Hình 1.32

a) Tìm các thời điểm trong vòng 2 giây đầu tiên mà người chơi đu ở xa vị trí cân bằng nhất.

b) Tìm các thời điểm trong vòng 2 giây đầu tiên mà người chơi đu cách vị trí cân bằng 2 mét (tính chính xác đến $\frac{1}{100}$ giây).

38. Giải các phương trình sau :

a) $\cos^2 x - 3\sin^2 x = 0$;   b) $(\tan x + \cot x)^2 - (\tan x + \cot x) = 2$;

c) $\sin x + \sin^2 \frac{x}{2} = 0{,}5$.

39. Chứng minh rằng các phương trình sau đây vô nghiệm :

a) $\sin x - 2\cos x = 3$;   b) $5\sin 2x + \sin x + \cos x + 6 = 0$.

Hướng dẫn b) : Đặt $\sin x + \cos x = t$.

40. Tìm các nghiệm của mỗi phương trình sau trong khoảng đã cho (khi cần tính gần đúng thì tính chính xác đến $\frac{1}{10}$ giây) :

a) $2\sin^2 x - 3\cos x = 2,\ 0^o \leq x \leq 360^o$;

b) $\tan x + 2\cot x = 3,\ 180^o \leq x \leq 360^o$.

41. Giải các phương trình sau :

a) $3\sin^2 x - \sin 2x - \cos^2 x = 0$;

b) $3\sin^2 2x - \sin 2x \cos 2x - 4\cos^2 2x = 2$;

c) $2\sin^2 x + (3 + \sqrt{3})\sin x \cos x + (\sqrt{3} - 1)\cos^2 x = -1$.

42. Giải các phương trình sau :

a) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$;

b) $\sin x = \sqrt{2} \sin 5x - \cos x$;

c) $\dfrac{1}{\sin 2x} + \dfrac{1}{\cos 2x} = \dfrac{2}{\sin 4x}$;

d) $\sin x + \cos x = \dfrac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$.