

§ 6

MỘT VÀI QUY TẮC TÌM GIỚI HẠN VÔ CỰC

Các định lí trong mục 3 §4 chỉ đúng đối với các giới hạn hữu hạn, không áp dụng được cho các giới hạn vô cực. Trong mục này, ta sẽ giới thiệu một định lí liên quan đến giới hạn vô cực và hai quy tắc tìm giới hạn vô cực. Định lí và các quy tắc này được áp dụng cho mọi trường hợp :

$$x \rightarrow x_0, \quad x \rightarrow x_0^+, \quad x \rightarrow x_0^-, \quad x \rightarrow +\infty \text{ và } x \rightarrow -\infty.$$

Tuy nhiên, để cho gọn, ta chỉ phát biểu cho trường hợp $x \rightarrow x_0$.

ĐỊNH LÍ

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Dễ dàng suy ra định lí trên từ định nghĩa giới hạn của hàm số.

Quy tắc 1

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L \neq 0$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)]$ được cho trong bảng sau :

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	Dấu của L	$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)]$
$+\infty$	+	$+\infty$
$+\infty$	-	$-\infty$
$-\infty$	+	$-\infty$
$-\infty$	-	$+\infty$

Ví dụ 1. Tìm

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - x^2 + 3x - 5);$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x^3 - x^2 + 3x - 5}.$

Giải

a) Ta có

$$2x^3 - x^2 + 3x - 5 = x^3 \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{5}{x^3} \right) \text{ với mọi } x \neq 0.$$

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{5}{x^3} \right) = 2 > 0$ nên

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - x^2 + 3x - 5) = -\infty.$$

b) Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} |2x^3 - x^2 + 3x - 5| = +\infty$ nên $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x^3 - x^2 + 3x - 5} = 0$. \square

Ví dụ 2. Tìm $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^2 - 5x}$.

Giải

Với $x < 0$, ta có

$$\sqrt{3x^2 - 5x} = \sqrt{x^2 \left(3 - \frac{5}{x} \right)} = |x| \sqrt{3 - \frac{5}{x}}. \text{ Vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} |x| = +\infty \text{ và}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3 - \frac{5}{x}} = \sqrt{3} > 0 \text{ nên } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^2 - 5x} = +\infty. \quad \square$$

[H1] Tìm $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2 - 2x^3}$.

Quy tắc 2

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ và $g(x) > 0$ hoặc $g(x) < 0$

với mọi $x \in J \setminus \{x_0\}$, trong đó J là một khoảng nào đó chứa x_0

thì $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ được cho trong bảng sau :

Dấu của L	Dấu của $g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
+	+	$+\infty$
+	-	$-\infty$
-	+	$-\infty$
-	-	$+\infty$

Ví dụ 3. Tìm $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+1}{(x+2)^2}$.

Giai

Ta có $\lim_{x \rightarrow -2} (2x+1) = -3 < 0$, $\lim_{x \rightarrow -2} (x+2)^2 = 0$ và $(x+2)^2 > 0$ với mọi $x \neq -2$. Do đó $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+1}{(x+2)^2} = -\infty$. \square

Ví dụ 4. Tìm $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2+x-2}{x-2}$.

Giai

Vì $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2+x-2) = 4 > 0$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = 0$ và $x-2 > 0$ với mọi $x > 2$ nên

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2+x-2}{x-2} = +\infty. \quad \square$$

H2 Tìm $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2+x-2}{x-2}$.

Ví dụ 5. Tìm $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3-5x^2+1}{x^2-x+1}$.

Giai

Chia tử và mẫu của phân thức cho x^3 (x^3 là luỹ thừa của x có bậc cao nhất trong tử và mẫu của phân thức), ta được

$$\frac{2x^3-5x^2+1}{x^2-x+1} = \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} \text{ với mọi } x \neq 0.$$

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^3}\right) = 2 > 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = 0$ và

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) < 0 \text{ với } x < 0 \text{ nên}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3-5x^2+1}{x^2-x+1} = -\infty. \quad \square$$

Câu hỏi và bài tập

34. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 - 5x^2 + 7)$;

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^4 - 3x + 12}$.

35. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x+1}{x-2}$;

b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x+1}{x-2}$;

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$;

d) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right)$.

36. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-5}{x^2+1}$;

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x}$.

37. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2}{(x-1)^2} \cdot \frac{2x+1}{2x-3} \right]$;

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5}{(x-1)(x^2-3x+2)}$.