§ 3 NHỊ THỨC NIU-TƠN

1. Công thức nhị thức Niu-tơn

Ta đã biết các hằng đẳng thức

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Các hệ số trong khai triển $(a+b)^2$ theo thứ tự từ trái qua phải là $1 = C_2^0$; $2 = C_2^1$; $1 = C_2^2$ tức là $(a+b)^2 = C_2^0a^2 + C_2^1ab + C_2^2b^2$.

Các hệ số trong khai triển $(a+b)^3$ theo thứ tự từ trái qua phải là $1 = C_3^0$; $3 = C_3^1$; $3 = C_3^2$; và $1 = C_3^3$ tức là $(a+b)^3 = C_3^0a^3 + C_3^1a^2b + C_3^2ab^2 + C_3^3b^3$.

Tổng quát, người ta chứng minh được rằng :

$$(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + ... + C_n^ka^{n-k}b^k + ... + C_n^nb^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^ka^{n-k}b^k \text{ (quy ước } a^0 = b^0 = 1).$$

Công thức này được gọi là **công thức nhị thức Niu-tơn** (gọi tắt là **nhị thức Niu-tơn**).

Ví dụ 1. Tính hệ số của $x^{12}y^{13}$ trong khai triển $(x+y)^{25}$.

Giải

Theo công thức nhị thức Niu-tơn, hệ số này là $C_{25}^{13} = \dfrac{25!}{13!.12!} = 5200300$. □

Ví dụ 2. Tìm hệ số của x^3 trong khai triển $(3x-4)^5$.

Giải

Ta có $(3x-4)^5 = (3x+(-4))^5$. Theo công thức nhị thức Niu-tơn, số hạng chứa x^3 là $C_5^2(3x)^3.(-4)^2$. Vậy hệ số của x^3 là $10 . 3^3 . (-4)^2 = 4320$. □

H1 *Tìm hệ số của x^2 trong khai triển $(3x-4)^5$.*

Ví dụ 3. Viết khai triển $(x-2)^6$.

Giải

Theo công thức nhị thức Niu-tơn

$$(x-2)^6 = (-2+x)^6 = \sum_{k=0}^{6} C_6^k(-2)^{6-k}x^k = \sum_{k=0}^{6} a_k x^k \text{ với } a_k = C_6^k(-2)^{6-k}.$$

Tính theo công thức này, ta có

$a_0 = 64$; $a_1 = 6.(-2)^5 = -192$;

$a_2 = 15 . 2^4 = 240$; $a_3 = 20.(-2)^3 = -160$;

$a_4 = 15 . 2^2 = 60$; $a_5 = 6.(-2) = -12$; $a_6 = 1$.

Vậy $(x-2)^6 = x^6 - 12x^5 + 60x^4 - 160x^3 + 240x^2 - 192x + 64$. □

Ví dụ 4. Gọi T là số các tập con (kể cả tập rỗng) của một tập hợp có n phần tử. Chứng minh rằng $T = 2^n$.

Giải

Với mỗi số nguyên k $(1 \le k \le n)$, số tập con có k phần tử của tập hợp có n phần tử là C_n^k. Vì có đúng một tập con (tập rỗng) có 0 phần tử và $C_n^0 = 1$ nên

$$T = \sum_{k=0}^{n} C_n^k. \quad (1)$$

Trong công thức nhị thức Niu-tơn đặt $a = b = 1$, ta được

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k . \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được $\quad T = 2^n$. □

2. Tam giác Pa-xcan

Trên đây ta thấy muốn khai triển $(a+b)^n$ thành đa thức, ta cần biết $n+1$ số $C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^{n-1}, C_n^n$ có mặt trong công thức nhị thức Niu-tơn. Các số này có thể tính được nhờ công thức (4) ở §2. Ngoài ra còn có thể tìm được chúng bằng cách sử dụng bảng số sau đây :

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

. . . . . .

Bảng số này do nhà toán học Pháp Pa-xcan thiết lập vào năm 1653 và được người ta gọi là **tam giác Pa-xcan**.

Tam giác Pa-xcan được lập theo quy luật sau :

– Đỉnh được ghi số 1. Tiếp theo là hàng thứ nhất ghi hai số 1.

– Nếu biết hàng thứ n ($n \geq 1$) thì hàng thứ $n+1$ tiếp theo được thiết lập bằng cách cộng hai số liên tiếp của hàng thứ n rồi viết kết quả xuống hàng dưới ở vị trí giữa hai số này. Sau đó viết số 1 ở đầu và cuối hàng.

Chẳng hạn, khi có hàng thứ năm ta thiết lập hàng thứ sáu như sau : Theo thứ tự từ trái sang phải, ta lấy $1 + 5 = 6$ và viết số 6 xuống hàng dưới ở vị trí giữa số 1 và số 5 ; lấy $5 + 10 = 15$ và viết số 15 xuống hàng dưới ở vị trí giữa số 5 và số 10 ; lấy $10 + 10 = 20$ và viết số 20 xuống hàng dưới ở vị trí giữa số 10 và số 10 ; lấy $10 + 5 = 15$ và viết số 15 xuống hàng dưới ở vị trí giữa số 10 và

số 5 ; lấy 5 + 1 = 6 và viết số 6 xuống hàng dưới ở vị trí giữa số 5 và số 1. Cuối cùng viết số 1 ở đầu và cuối hàng (xem bảng số trên).

H2 *Điền tiếp tục các số vào các hàng thứ bảy và thứ tám trong bảng số trên.*

Nhận xét

Xét hàng thứ nhất, ta có

$$1 = C_1^0, \quad 1 = C_1^1.$$

Ở hàng thứ hai, ta có

$$1 = C_2^0, \quad 2 = C_2^1, \quad 1 = C_2^2.$$

Ở hàng thứ ba, ta có

$$1 = C_3^0, \quad 3 = C_3^1, \quad 3 = C_3^2, \quad 1 = C_3^3.$$

Một cách tổng quát, từ tính chất 2 của số C_n^k (hằng đẳng thức Pa-xcan) và cách thiết lập tam giác Pa-xcan, ta có

> Các số ở hàng thứ n trong tam giác Pa-xcan là dãy gồm $n + 1$ số
>
> $$C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^{n-1}, C_n^n.$$

Câu hỏi và bài tập

17. Tìm hệ số của $x^{101}y^{99}$ trong khai triển $(2x - 3y)^{200}$.

18. Tính hệ số của x^5y^8 trong khai triển $(x + y)^{13}$.

19. Tính hệ số của x^7 trong khai triển $(1 + x)^{11}$.

20. Tính hệ số của x^9 trong khai triển $(2 - x)^{19}$.

Luyện tập

21. Khai triển $(3x + 1)^{10}$ cho tới x^3.

22. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển của $(3 - 2x)^{15}$.

23. Tính hệ số của $x^{25}y^{10}$ trong khai triển của $(x^3 + xy)^{15}$.

24. Biết rằng hệ số của x^{n-2} trong khai triển $\left(x - \frac{1}{4}\right)^n$ bằng 31. Tìm n.

Em có biết

MỘT SỐ MẨU CHUYỆN VỀ NHÀ TOÁN HỌC PA-XCAN (PASCAL)

Blaise Pascal (1623-1662)

1. Hồi nhỏ Pa-xcan rất ham mê Hình học. Nhưng vì Pa-xcan rất yếu nên cha ông không muốn cho ông học Toán. Cha ông giấu hết các sách vở và những gì liên quan tới Toán. Thế là Pa-xcan phải tự mày mò xây dựng nên môn Hình học cho riêng mình. Ông vẽ các hình và tự đặt tên cho chúng. Ông gọi đường thẳng là "cây gậy", đường tròn là "cái bánh xe", hình tam giác là "thước thợ", hình chữ nhật là "mặt bàn".... Ông đã tìm ra và chứng minh được rất nhiều định lí của Hình học trong đó có định lí : "Tổng các góc của một thước thợ bằng nửa tổng các góc của một mặt bàn". Năm ấy Pa-xcan mới 12 tuổi.

2. Năm 16 tuổi, Pa-xcan công bố một công trình toán học : "Về thiết diện của đường cônic", trong đó ông đã chứng minh một định lí nổi tiếng (sau này mang tên ông) và gọi đó là "Định lí về lục giác thần kì". Ông rút ra 400 hệ quả từ định lí này. Nhà toán học và triết học vĩ đại lúc bấy giờ là Đề-các (Descartes) đánh giá rất cao công trình toán học này và nói rằng : "Tôi không thể tưởng tượng nổi một người đang ở tuổi thiếu niên mà lại có thể viết được một tác phẩm lớn như vậy".

3. Năm 17 tuổi, thấy cha (một kế toán) phải làm nhiều tính toán vất vả, Pa-xcan đã nảy ra ý định chế tạo một chiếc máy tính. Sau 5 năm lao động căng thẳng miệt mài, ông đã chế tạo xong chiếc máy tính làm được bốn phép tính cộng, trừ, nhân, chia, tuy rằng chưa nhanh lắm. *Đó là chiếc máy tính đầu tiên trong lịch sử nhân loại.* Để ghi nhớ công lao này, tên của ông đã được đặt cho một ngôn ngữ lập trình, là ngôn ngữ lập trình Pa-xcan.

4. Vào năm 1651, khi Pa-xcan 28 tuổi và được cả châu Âu tôn vinh là thần đồng, ông nhận được một bức thư của nhà quý tộc Pháp Đờ Mê-rê (De Méré) nhờ ông giải đáp một số vấn đề rắc rối nảy sinh trong các trò chơi đánh bạc. Pa-xcan đã "toán học hoá" các trò chơi cờ bạc này, nâng lên thành những bài toán phức tạp hơn và trao đổi vấn đề này với nhà toán học Phéc-ma. Những cuộc trao đổi đó đã khai sinh ra *Lí thuyết xác suất* – Lí thuyết toán học về các hiện tượng ngẫu nhiên.

5. Sau khi cha mất, chị gái bỏ đi tu, lại thêm ốm đau bệnh tật, Pa-xcan chán chường tất cả. Ông bỏ Toán học, đắm chìm vào những suy tư về tín ngưỡng và nghiên cứu Thần học. Vào một đêm đầu mùa xuân năm 1658, một cơn đau răng dữ dội làm Pa-xcan không ngủ được. Để quên đau, ông tập trung suy nghĩ về bài toán đường xyclôít, một bài toán khó đang thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học lúc đó. Kì lạ thay, ông đã giải được bài toán đó và sáng hôm sau cũng khỏi luôn bệnh đau răng. Ông nghĩ rằng đây là một thông điệp của Chúa nhắc nhở rằng ông không được quên và rời bỏ Toán học. Và thế là sau bốn năm đi theo con đường tín ngưỡng tôn giáo, Pa-xcan lại quay về với Toán học.

6. Không chỉ là một nhà toán học thiên tài, Pa-xcan còn là một nhà vật lí học nổi tiếng, là nhà văn, nhà tư tưởng lớn. Ngày nay người ta thường nhắc đến các câu nói của Pa-xcan như : "Con người chỉ là một cây sậy, một vật rất yếu đuối của tự nhiên, nhưng là một cây sậy biết suy nghĩ " và "Trái tim có những lí lẽ mà lí trí không giải thích được".

Pa-xcan mất khi mới 39 tuổi. Ông được coi là một trong những nhà bác học lớn của nhân loại.

B. XÁC SUẤT

Trong thực tiễn, chúng ta thường gặp những hiện tượng ngẫu nhiên. Đó là những hiện tượng (biến cố) mà chúng ta không thể dự báo một cách chắc chắn là nó xảy ra hay không xảy ra.

Lí thuyết xác suất là bộ môn toán học nghiên cứu các hiện tượng ngẫu nhiên. Sự ra đời của lí thuyết xác suất bắt đầu từ những thư từ trao đổi giữa hai nhà toán học vĩ đại người Pháp là Pa-xcan (1623-1662) và Phéc-ma (1601-1665) xung quanh cách giải đáp một số vấn đề rắc rối nảy sinh trong các trò chơi cờ bạc mà một nhà quý tộc Pháp đặt ra cho Pa-xcan. Năm 1812, nhà toán học Pháp La-pla-xơ đã dự báo rằng "Môn khoa học bắt đầu từ việc xem xét các trò chơi may rủi này sẽ hứa hẹn trở thành một đối tượng quan trọng nhất của tri thức loài người".

Ngày nay lí thuyết xác suất đã trở thành một ngành toán học quan trọng, được ứng dụng trong rất nhiều lĩnh vực của khoa học tự nhiên, khoa học xã hội, công nghệ, kinh tế, y học, sinh học,...