

§ 1

PHƯƠNG PHÁP QUY nạp TOÁN HỌC

1. Phương pháp quy nạp toán học

Trong nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học (số học, đại số, hình học, giải tích, ...), ta thường gặp những bài toán với yêu cầu chứng minh mệnh đề chứa biến $A(n)$ là một mệnh đề đúng với mọi giá trị nguyên dương của biến n .

Xét bài toán : *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta luôn có*

$$1.2 + 2.3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}. \quad (1)$$

H1 a) Hãy kiểm tra đẳng thức (1) khi $n = 1$.

b) Em có thể kiểm tra đẳng thức (1) với mọi giá trị nguyên dương của n hay không ?

Nhận thấy, ta có thể chứng minh được khẳng định sau :

"Với k là một số nguyên dương tùy ý, nếu (1) đã đúng khi $n = k$ thì nó cũng đúng khi $n = k + 1$."

Điều đó có nghĩa là : "Nếu ta đã có

$$1.2 + 2.3 + \dots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} \quad (2)$$

thì ta cũng sẽ có

$$1.2 + 2.3 + \dots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.$$

Thật vậy, theo (2) ta có

$$\begin{aligned} 1.2 + 2.3 + \dots + k(k+1) + (k+1)(k+2) &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}. \end{aligned}$$

Nhờ việc kiểm nghiệm (1) đúng khi $n = 1$ và kết quả vừa chứng minh trên, ta có thể suy ra (1) đúng với mọi giá trị nguyên dương của n .

Thật vậy, vì (1) đúng khi $n = 1$ nên theo kết quả vừa chứng minh trên, nó cũng đúng khi $n = 1 + 1 = 2$. Tương tự như thế, vì đúng khi $n = 2$ nên nó sẽ đúng khi $n = 2 + 1 = 3$; và do đã đúng khi $n = 3$ nên nó phải đúng khi $n = 3 + 1 = 4$; Tiếp tục quá trình suy luận đó, ta đi đến kết luận (1) đúng với mọi giá trị nguyên dương của n . Bài toán được giải quyết.

Một cách khái quát :

Để chứng minh mệnh đề chứa biến $A(n)$ là một mệnh đề đúng với mọi giá trị nguyên dương của n , ta thực hiện hai bước sau :

- **Bước 1** (*bước cơ sở*, hay *bước khởi đầu*). Chứng minh $A(n)$ là một mệnh đề đúng khi $n = 1$.

- **Bước 2** (*bước quy nạp*, hay *bước "di truyền"*). Với k là một số nguyên dương tùy ý, xuất phát từ giả thiết $A(n)$ là một mệnh đề đúng khi $n = k$, chứng minh $A(n)$ cũng là một mệnh đề đúng khi $n = k + 1$.

Người ta gọi phương pháp chứng minh vừa nêu trên là *phương pháp quy nạp toán học* (hay còn gọi tắt là *phương pháp quy nạp*). Giả thiết được nói tới ở bước 2 gọi là *giả thiết quy nạp*.

2. Một số ví dụ áp dụng

Ví dụ 1. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta luôn có

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \quad (3)$$

Giải

Ta sẽ giải bài toán bằng phương pháp quy nạp.

- Với $n = 1$, ta có

$$1^3 = 1 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}.$$

Như vậy, (3) đúng khi $n = 1$.

- Giả sử (3) đúng khi $n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$, tức là

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4},$$

ta sẽ chứng minh nó cũng đúng khi $n = k + 1$, tức là

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

Thật vậy, từ giả thiết quy nạp, ta có

$$\begin{aligned}1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\ &= \frac{(k+1)^2}{4} \cdot (k^2 + 4k + 4) = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.\end{aligned}$$

Vậy (3) đúng với mọi số nguyên dương n . □

H2 Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta luôn có

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2.$$

H3 Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta luôn có

$$1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2 - 1)}{3}.$$

CHÚ Ý

Trong thực tế, ta còn gặp các bài toán với yêu cầu chứng minh mệnh đề chứa biến $A(n)$ là một mệnh đề đúng với mọi giá trị nguyên dương $n \geq p$, trong đó p là một số nguyên dương cho trước. Trong trường hợp này, để giải quyết bài toán đặt ra bằng phương pháp quy nạp, ở bước 1 ta cần chứng minh $A(n)$ là mệnh đề đúng khi $n = p$ và ở bước 2, cần xét giả thiết quy nạp với k là số nguyên dương tùy ý lớn hơn hoặc bằng p .

Ví dụ 2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n \geq 3$, ta luôn có

$$2^n > 2n + 1. \tag{4}$$

Giải

Ta sẽ giải bài toán bằng phương pháp quy nạp.

• Với $n = 3$, ta có

$$2^n = 2^3 = 8 \quad \text{và} \quad 2n + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7.$$

Rõ ràng $8 > 7$, và do đó (4) đúng khi $n = 3$.

• Giả sử (4) đúng khi $n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$ và $k \geq 3$, tức là

$$2^k > 2k + 1,$$

ta sẽ chứng minh nó cũng đúng khi $n = k + 1$, tức là

$$2^{k+1} > 2(k+1) + 1.$$

Thật vậy, từ giả thiết quy nạp, ta có

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2(2k+1) = 4k+2 > 2k+3 = 2(k+1)+1.$$

Vậy (4) đúng với mọi số nguyên dương $n \geq 3$. \square

Câu hỏi và bài tập

1. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta luôn có đẳng thức sau :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta luôn có đẳng thức :

$$2^2 + 4^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}.$$

3. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta luôn có bất đẳng thức :

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

4. Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 2$, ta luôn có đẳng thức sau :

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

5. Cho n là một số nguyên lớn hơn 1. Hãy chứng minh bất đẳng thức sau :

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}.$$

6. Với mỗi số nguyên dương n , đặt $u_n = 7 \cdot 2^{2n-2} + 3^{2n-1}$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta luôn có u_n chia hết cho 5.

7. Cho số thực $x > -1$. Chứng minh rằng

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

với mọi số nguyên dương n .

8. Một học sinh chứng minh mệnh đề "Với k là một số nguyên dương tùy ý, nếu $8^k + 1$ chia hết cho 7 thì $8^{k+1} + 1$ cũng chia hết cho 7" như sau :

Ta có : $8^{k+1} + 1 = 8(8^k + 1) - 7$. Từ đây và giả thiết " $8^k + 1$ chia hết cho 7", hiển nhiên suy ra $8^{k+1} + 1$ chia hết cho 7.

Hỏi từ chứng minh trên, bạn học sinh đó có thể kết luận được " $8^n + 1$ chia hết cho 7 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ " hay không ? Vì sao ?