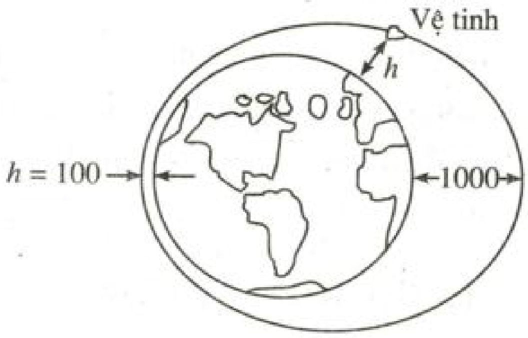
§ 2 PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

Ta xét bài toán sau :

Một vệ tinh nhân tạo bay quanh Trái Đất theo một quỹ đạo hình elip (h. 1.18). Độ cao h (tính bằng kilômet) của vệ tinh so với bề mặt Trái Đất được xác định bởi công thức

$$h = 550 + 450\cos\frac{\pi}{50}t,$$



Hình 1.18

trong đó t là thời gian tính bằng phút kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo. Người ta cần thực hiện một thí nghiệm khoa học khi vệ tinh cách mặt đất 250km. Hãy tìm các thời điểm để có thể thực hiện thí nghiệm đó.

Bài toán này dẫn đến việc giải phương trình

$$550 + 450\cos\frac{\pi}{50}t = 250, \text{ hay } \cos\frac{\pi}{50}t = -\frac{2}{3}\cdot$$

Nếu đặt $x = \frac{\pi}{50}t$ thì phương trình trên có dạng $\cos x = -\frac{2}{3}\cdot$

Trên thực tế, có nhiều bài toán dẫn đến việc giải các phương trình có một trong các dạng

$$\sin x = m,\ \cos x = m,\ \tan x = m \text{ và } \cot x = m,$$

trong đó x là ẩn số ($x \in \mathbb{R}$) và m là một số cho trước.

Đó là các **phương trình lượng giác cơ bản**.

1. Phương trình $\sin x = m$

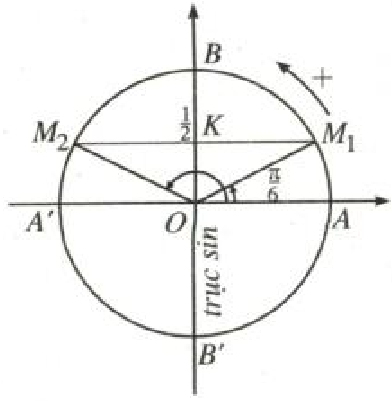
a) Để làm ví dụ, ta xét một phương trình cụ thể, chẳng hạn

$$\sin x = \frac{1}{2}\cdot \qquad (1)$$

H1 *Tìm một nghiệm của phương trình* (1).

Để tìm tất cả các nghiệm của (1), ta có thể làm như sau :

Xét đường tròn lượng giác gốc A. Trên trục sin, ta lấy điểm K sao cho $\overline{OK} = \frac{1}{2}$. Đường thẳng qua K và vuông góc với trục sin cắt đường tròn lượng giác tại hai điểm M_1 và M_2 ; hai điểm này đối xứng với nhau qua trục sin (h. 1.19). Ta có



Hình 1.19

$$\sin(OA, OM_1) = \sin(OA, OM_2) = \overline{OK} = \frac{1}{2}.$$

Dễ thấy, số đo (rađian) của các góc lượng giác (OA, OM_1) và (OA, OM_2) là tất cả các nghiệm của (1). Lấy một nghiệm tuỳ ý của (1), chẳng hạn $x = \frac{\pi}{6}$. Khi đó các góc (OA, OM_1) có số đo $\frac{\pi}{6} + k2\pi$; các góc (OA, OM_2) có số đo $\pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Vậy

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \text{ hoặc } x = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Sử dụng kí hiệu "[" thay cho từ "hoặc", ta có thể viết lại kết quả trên như sau :

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Giả sử m là một số đã cho. Xét phương trình

$$\sin x = m. \qquad \text{(I)}$$

Hiển nhiên phương trình (I) xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ta đã biết, $|\sin x| \leq 1$ với mọi x. Do đó phương trình (I) vô nghiệm khi $|m| > 1$. Mặt khác, khi x thay đổi, $\sin x$ nhận mọi giá trị từ -1 đến 1 nên phương trình (I) luôn có nghiệm khi $|m| \leq 1$.

Làm tương tự như đối với phương trình (1), ta có

> Nếu α là một nghiệm của phương trình (I), nghĩa là $\sin\alpha = m$ thì
>
> $$\sin x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}). \qquad \text{(Ia)}$$

Ta nói rằng $x = \alpha + k2\pi$ và $x = \pi - \alpha + k2\pi$ là hai *họ nghiệm* của phương trình (I).

Kể từ đây, để cho gọn ta quy ước rằng nếu trong một biểu thức nghiệm của phương trình lượng giác có chứa k mà không giải thích gì thêm thì ta hiểu rằng k nhận mọi giá trị thuộc $\mathbb{Z}$. Chẳng hạn, $x = \alpha + k2\pi$ có nghĩa là x lấy mọi giá trị thuộc tập hợp

$$\{\alpha, \alpha \pm 2\pi, \alpha \pm 4\pi, \alpha \pm 6\pi, \ldots\}.$$

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau :

1) $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;   2) $\sin x = \dfrac{2}{3}$.

Giải

1) Do $\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ nên

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pi - \left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, \\ x = \dfrac{4\pi}{3} + k2\pi. \end{array}\right.$$

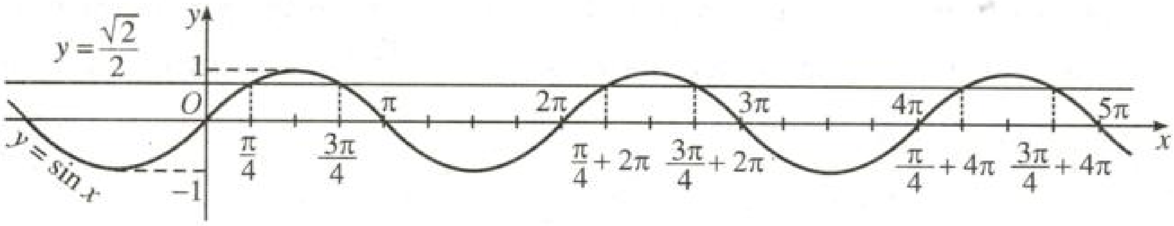
2) Vì $\dfrac{2}{3} < 1$ nên có số α để $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$. Do đó

$$\sin x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi, \\ x = \pi - \alpha + k2\pi. \end{array}\right.$$ □

H2 *Giải phương trình* $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Trong mặt phẳng toạ độ, nếu vẽ đồ thị (G) của hàm số $y = \sin x$ và đường thẳng $(d) : y = m$ thì hoành độ mỗi giao điểm của (d) và (G) (nếu có) là một nghiệm của phương trình $\sin x = m$.

H3 *Trên đồ thị hàm số* $y = \sin x$ *(h.1.20), hãy chỉ ra các điểm có hoành độ trong khoảng* $(0 ; 5\pi)$ *là nghiệm của phương trình* $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Hình 1.20

CHÚ Ý

1) Khi $m \in \{0 ; \pm 1\}$, công thức (Ia) có thể viết gọn như sau :

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi,$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi.$$

2) Dễ thấy rằng với m cho trước mà $|m| \le 1$, phương trình $\sin x = m$ có đúng một nghiệm nằm trong đoạn $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$. Người ta thường kí hiệu nghiệm đó là $\arcsin m$ (đọc là ác-sin m). Khi đó

$$\sin x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin m + k2\pi, \\ x = \pi - \arcsin m + k2\pi. \end{array}\right.$$

Vậy ở ví dụ 1 câu 2) có thể viết

$$\sin x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin \frac{2}{3} + k2\pi, \\ x = \pi - \arcsin \frac{2}{3} + k2\pi. \end{array}\right.$$

3) Từ (Ia) ta thấy rằng : Nếu α và β là hai số thực thì $\sin\beta = \sin\alpha$ khi và chỉ khi có số nguyên k để $\beta = \alpha + k2\pi$ hoặc $\beta = \pi - \alpha + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 2. Tìm số x thoả mãn phương trình $\sin(2x - \frac{\pi}{5}) = \sin\left(\frac{\pi}{5} + x\right)$.

Giải

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5} + x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{5} + x + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{5} = \pi - \left(\frac{\pi}{5} + x\right) + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{5} + k2\pi \\ 3x = \pi + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{5} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}. \end{array}\right.$$

Vậy các số x cần tìm là $x = \frac{2\pi}{5} + k2\pi$ và $x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$. □

H4 *Giải phương trình* $\sin 2x = \sin x$.

2. Phương trình $\cos x = m$

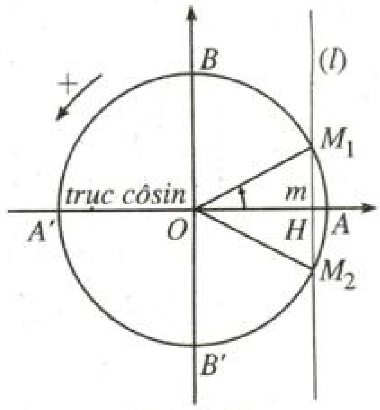
Xét phương trình

$$\cos x = m, \qquad \text{(II)}$$

trong đó m là một số cho trước. Hiển nhiên phương trình (II) xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Dễ thấy rằng :

Khi $|m| > 1$, phương trình (II) vô nghiệm.

Khi $|m| \leq 1$, phương trình (II) luôn có nghiệm. Để tìm tất cả các nghiệm của (II), trên trục côsin ta lấy điểm H sao cho $\overline{OH} = m$. Gọi (l) là đường thẳng đi qua H và vuông góc với trục côsin (h. 1.21).



Hình 1.21

Do $|m| \leq 1$ nên đường thẳng (l) cắt đường tròn lượng giác tại hai điểm M_1 và M_2. Hai điểm này đối xứng với nhau qua trục côsin (chúng trùng nhau nếu $m = \pm 1$). Ta thấy số đo của các góc lượng giác (OA, OM_1) và (OA, OM_2) là tất cả các nghiệm của (II). Nếu α là số đo của một góc trong chúng, nói cách khác, nếu α là một nghiệm của (II) thì các góc đó có các số đo là $\alpha + k2\pi$ và $-\alpha + k2\pi$. Vậy ta có

> Nếu α là một nghiệm của phương trình (II), nghĩa là $\cos\alpha = m$ thì
>
> $$\cos x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi, \\ x = -\alpha + k2\pi. \end{array}\right. \qquad \text{(IIa)}$$

H5 *Giải phương trình sau :* $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

CHÚ Ý

1) Đặc biệt, khi $m \in \{0 ; \pm 1\}$, công thức (IIa) có thể viết gọn như sau

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi,$$
$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi,$$
$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

2) Dễ thấy rằng với mọi số m cho trước mà $|m| \leq 1$, phương trình $\cos x = m$ có đúng một nghiệm nằm trong đoạn $[0 ; \pi]$. Người ta thường kí hiệu nghiệm đó là $\arccos m$ (đọc là ác-côsin m). Khi đó

$$\cos x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arccos m + k2\pi, \\ x = -\arccos m + k2\pi. \end{array}\right.$$

mà cũng thường được viết là $x = \pm \arccos m + k2\pi$.

3) Từ (IIa) ta thấy rằng : Nếu α và β là hai số thực thì $\cos\beta = \cos\alpha$ khi và chỉ khi có số nguyên k để $\beta = \alpha + k2\pi$ hoặc $\beta = -\alpha + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

H6 *Hãy giải phương trình* $\cos(2x+1) = \cos(2x-1)$.

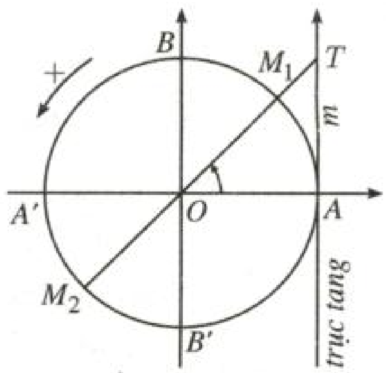
3. Phương trình $\tan x = m$

Cho m là một số tuỳ ý. Xét phương trình

$$\tan x = m. \qquad \text{(III)}$$

Điều kiện xác định (ĐKXĐ) của phương trình (III) là $\cos x \neq 0$.

Ta đã biết, khi x thay đổi, $\tan x$ nhận mọi giá trị từ $-\infty$ đến $+\infty$. Do đó phương trình (III) luôn có nghiệm. Để tìm tất cả các nghiệm của (III), trên trục tang, ta lấy điểm T sao cho $\overline{AT} = m$. Đường thẳng OT cắt đường tròn lượng giác tại hai điểm M_1 và M_2 (h. 1.22). Ta có



Hình 1.22

$$\tan(OA, OM_1) = \tan(OA, OM_2) = \overline{AT} = m.$$

Gọi số đo của một trong các góc lượng giác (OA, OM_1) và (OA, OM_2) là α; nói cách khác, α là một nghiệm nào đó của phương trình (III). Khi đó, các góc lượng giác (OA, OM_1) và (OA, OM_2) có các số đo là $\alpha + k\pi$. Đó là tất cả các nghiệm của phương trình (III) (hiển nhiên chúng thoả mãn ĐKXĐ của (III)). Vậy ta có

> Nếu α là một nghiệm của phương trình (III), nghĩa là $\tan\alpha = m$ thì
> $$\tan x = m \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi. \qquad \text{(IIIa)}$$

Ví dụ 3. Giải các phương trình sau :

1) $\tan x = -1$; 2) $\tan\dfrac{x}{3} = 3$.

Giải

1) Vì $-1 = \tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$ nên

$$\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$$

2) Gọi α là một số mà $\tan\alpha = 3$. Khi đó

$$\tan\frac{x}{3} = 3 \Leftrightarrow \frac{x}{3} = \alpha + k\pi \Leftrightarrow x = 3\alpha + k3\pi.$$

(Có thể tìm được một số α thoả mãn $\tan\alpha = 3$ bằng cách tra bảng số hoặc dùng máy tính bỏ túi. Cụ thể là $\alpha \approx 1{,}249$). □

CHÚ Ý

1) Dễ thấy rằng với mọi số m cho trước, phương trình $\tan x = m$ có đúng một nghiệm nằm trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Người ta thường kí hiệu nghiệm đó là $\arctan m$ (đọc là ác-tang m). Khi đó

$$\tan x = m \Leftrightarrow x = \arctan m + k\pi.$$

2) Từ (IIIa) ta thấy rằng : Nếu α và β là hai số thực mà $\tan\alpha$, $\tan\beta$ xác định thì $\tan\beta = \tan\alpha$ khi và chỉ khi có số nguyên k để $\beta = \alpha + k\pi$.

H7 *Giải phương trình* $\tan 2x = \tan x$.

4. Phương trình $\cot x = m$

Cho m là một số tuỳ ý, xét phương trình

$$\cot x = m. \qquad \text{(IV)}$$

ĐKXĐ của phương trình (IV) là $\sin x \neq 0$. Tương tự như đối với phương trình $\tan x = m$, ta có

> Nếu α là một nghiệm của phương trình (IV), nghĩa là $\cot\alpha = m$ thì
>
> $$\cot x = m \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi. \qquad \text{(IVa)}$$

Ví dụ 4. Giải các phương trình sau :

1) $\cot x = -\frac{1}{3}$; 2) $\cot 3x = 1$.

Giải

1) Gọi α là một số mà $\cot\alpha = -\frac{1}{3}$, tức là $\tan\alpha = -3$ (chẳng hạn, bằng bảng số hoặc máy tính bỏ túi, ta tìm được $\alpha \approx -1{,}249$). Khi đó

$$\cot x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi.$$

2) $\cot 3x = 1 \Leftrightarrow \cot 3x = \cot\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow 3x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{3}$. □

CHÚ Ý

Dễ thấy rằng với mọi số m cho trước, phương trình $\cot x = m$ có đúng một nghiệm nằm trong khoảng $(0 ; \pi)$. Người ta thường kí hiệu nghiệm đó là $\text{arccot}\, m$ (đọc là ác-côtang m).Khi đó

$$\cot x = m \Leftrightarrow x = \text{arccot}\, m + k\pi.$$

H8 *Giải phương trình* $\cot\left(\dfrac{2x+1}{6}\right) = \tan\dfrac{1}{3}\cdot$

5. Một số điều cần lưu ý

1) Khi đã cho số m, ta có thể tính được các giá trị $\arcsin m$, $\arccos m$ (với $|m| \leq 1$), $\arctan m$ bằng máy tính bỏ túi với các phím $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ và $\tan^{-1}$ (xem *bài đọc thêm* trang 30).

2) $\arcsin m$, $\arccos m$ (với $|\, m \,| \leq 1$), $\arctan m$ và $\text{arccot}\, m$ có giá trị là những số thực. Do đó ta viết, chẳng hạn $\arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$ mà không viết $\arctan 1 = 45^{\circ}$.

3) Khi xét các phương trình lượng giác ta đã coi ẩn số x là số đo rađian của các góc lượng giác. Trên thực tế, ta còn gặp những bài toán yêu cầu tìm số đo độ của các góc (cung) lượng giác sao cho sin (côsin, tang hoặc côtang) của chúng bằng số m cho trước chẳng hạn $\sin(x + 20^{\circ}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot$ Khi giải các phương trình này (mà lạm dụng ngôn ngữ, ta vẫn gọi là giải các phương trình lượng giác), ta có thể áp dụng các công thức nêu trên và lưu ý sử dụng kí hiệu số đo độ trong "công thức nghiệm" cho thống nhất, chẳng hạn viết $x = 30^{\circ} + k360^{\circ}$ chứ không viết $x = 30^{\circ} + k2\pi$.

Tuy nhiên, ta quy ước rằng nếu không có giải thích gì thêm hoặc trong phương trình lượng giác không sử dụng đơn vị đo góc là độ thì mặc nhiên ẩn số là số đo rađian của góc lượng giác.

Ví dụ 5. Giải phương trình $\sin(x + 20^{\circ}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot$

Giải

Vì $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^{\circ}$ nên

$$\sin(x + 20^{\circ}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin(x + 20^{\circ}) = \sin 60^{\circ}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+20^{\circ}=60^{\circ}+k360^{\circ} \\ x+20^{\circ}=180^{\circ}-60^{\circ}+k360^{\circ} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 40^{\circ} + k360^{\circ} \\ x = 100^{\circ} + k360^{\circ} \end{array}\right. \square$$

H9 *Giải các phương trình sau :*

1) $\cos(3x - 15^{\circ}) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\tan 5x = \tan 25^{\circ}$.

Câu hỏi và bài tập

14. Giải các phương trình sau :

a) $\sin 4x = \sin\dfrac{\pi}{5}$;

b) $\sin\left(\dfrac{x + \pi}{5}\right) = -\dfrac{1}{2}$;

c) $\cos\dfrac{x}{2} = \cos\sqrt{2}$;

d) $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{18}\right) = \dfrac{2}{5}$.

15. a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = \sin x$ rồi chỉ ra trên đồ thị đó các điểm có hoành độ thuộc khoảng $(-\pi ; 4\pi)$ là nghiệm của mỗi phương trình sau

1) $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $\sin x = 1$;

b) Cũng câu hỏi tương tự cho hàm số $y = \cos x$ đối với mỗi phương trình sau

1) $\cos x = \dfrac{1}{2}$;

2) $\cos x = -1$.

16. Tìm nghiệm của các phương trình sau trong khoảng đã cho

a) $\sin 2x = -\dfrac{1}{2}$ với $0 < x < \pi$;

b) $\cos(x - 5) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ với $-\pi < x < \pi$.

17. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số

$$d(t) = 3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] + 12 \text{ với } t \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 < t \leq 365.$$

a) Thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày nào trong năm ?

b) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất ?

c) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất ?

18. Giải các phương trình sau

a) $\tan 3x = \tan\frac{3\pi}{5}$; b) $\tan(x - 15^{\circ}) = 5$;

c) $\tan(2x - 1) = \sqrt{3}$; d) $\cot 2x = \cot\left(-\frac{1}{3}\right)$;

e) $\cot\left(\frac{x}{4} + 20^{\circ}\right) = -\sqrt{3}$; f) $\cot 3x = \tan\frac{2\pi}{5}$.

19. a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = \tan x$ rồi chỉ ra trên đồ thị đó các điểm có hoành độ thuộc khoảng $(-\pi ; \pi)$ là nghiệm của mỗi phương trình sau

1) $\tan x = -1$; 2) $\tan x = 0$;

b) Cũng câu hỏi tương tự cho hàm số $y = \cot x$ và cho mỗi phương trình sau

1) $\cot x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; 2) $\cot x = 1$.

20. Tìm nghiệm của các phương trình sau trên khoảng đã cho

a) $\tan(2x - 15^{\circ}) = 1$ với $-180^{\circ} < x < 90^{\circ}$;

b) $\cot 3x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ với $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

21. Khi giải phương trình $\tan x = -\sqrt{3}$, bạn Phương nhận thấy $-\sqrt{3} = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ và viết

$$\tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi.$$

Cũng phương trình đó, bạn Quyên lấy $-\sqrt{3} = \tan\frac{2\pi}{3}$ nên giải như sau :

$$\tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k\pi.$$

Theo em, ai giải đúng, ai giải sai ?

22. Tính các góc của tam giác ABC, biết $AB = \sqrt{2}$ cm, $AC = \sqrt{3}$ cm và đường cao $AH = 1$cm. (*Gợi ý :* Xét trường hợp B, C nằm khác phía đối với H và trường hợp B, C nằm cùng phía đối với H).

Bài đọc thêm

DÙNG MÁY TÍNH BỎ TÚI ĐỂ TÌM MỘT GÓC KHI BIẾT MỘT GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA NÓ

Các phím $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ và $\tan^{-1}$ của máy tính bỏ túi CASIO *fx - 500MS* được dùng để tìm số đo (độ hoặc rađian) của một góc khi biết một trong các giá trị lượng giác của nó. Muốn thế đối với máy tính CASIO *fx - 500MS* ta thực hiện hai bước sau :

Bước 1. Ấn định đơn vị đo góc (độ hoặc rađian).

Muốn tìm số đo độ, ta ấn $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{1}$. Lúc này dòng trên cùng của màn hình xuất hiện chữ nhỏ **D**.

Muốn tìm số đo rađian, ta ấn $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{2}$. Lúc này dòng trên cùng của màn hình xuất hiện chữ nhỏ **R**.

Bước 2. Tìm số đo góc.

Khi biết sin, côsin hay tang của góc α cần tìm bằng m, ta lần lượt ấn phím $\boxed{\text{SHIFT}}$, và một trong các phím $\boxed{\sin^{-1}}$, $\boxed{\cos^{-1}}$, $\boxed{\tan^{-1}}$, rồi nhập giá trị lượng giác m và cuối cùng ấn phím $\boxed{=}$. Lúc này, trên màn hình cho kết quả là số đo của góc α (độ hay rađian tuỳ theo bước 1).

CHÚ Ý

1) Ở chế độ số đo rađian, các phím $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ cho kết quả (khi $|m| \leq 1$) là $\arcsin m$, $\arccos m$; phím $\tan^{-1}$ cho kết quả là $\arctan m$.

2) Ở chế độ số đo độ, các phím $\sin^{-1}$ và $\tan^{-1}$ cho kết quả là số đo góc α từ -90^o đến 90^o ; phím $\cos^{-1}$ cho kết quả là số đo góc α từ 0^o đến 180^o. Các kết quả ấy được hiển thị dưới dạng số thập phân, chẳng hạn $7{,}065272931^o$.

Ví dụ 1. Để tìm số đo độ của góc α khi biết $\sin\alpha = -0{,}5$, ta lần lượt ấn

$$\underbrace{\boxed{\text{MODE}}\ \boxed{\text{MODE}}\ \boxed{\text{MODE}}\ \boxed{1}}_{\textit{Bước 1}}\ \underbrace{\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\sin^{-1}}\ -0{,}5\ \boxed{=}}_{\textit{Bước 2}}$$

Trên màn hình hiện kết quả -30, nghĩa là $\alpha = -30^{\circ}$.

Ví dụ 2. Để tìm số đo độ của góc α khi biết $\sin\alpha = 0{,}123$, ta lần lượt ấn

$$\underbrace{\boxed{\text{MODE}}\ \boxed{\text{MODE}}\ \boxed{\text{MODE}}\ \boxed{1}}_{\textit{Bước 1}}\ \underbrace{\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\sin^{-1}}\ 0{,}123\ \boxed{=}}_{\textit{Bước 2}}$$

Trên màn hình hiện kết quả 7.065272931, nghĩa là $\alpha \approx 7{,}065272931^{\circ}$. Muốn đưa kết quả này về dạng độ-phút-giây, ta ấn tiếp

$$\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\overleftarrow{{}^{\circ}\,'\,''}}$$

Trên màn hình hiện kết quả $7^{\square}3^{\square}54.98$, nghĩa là $\alpha \approx 7^{\circ}3'54{,}98'' \approx 7^{\circ}3'55''$.

Ví dụ 3. Để tìm số đo rađian của góc α khi biết $\tan\alpha = \sqrt{3} - 1$, ta lần lượt ấn

$$\underbrace{\boxed{\text{MODE}}\ \boxed{\text{MODE}}\ \boxed{\text{MODE}}\ \boxed{2}}_{\textit{Bước 1}}\ \underbrace{\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\tan^{-1}}\ \boxed{(}\ \sqrt{\ }\ 3\ \boxed{-}\ 1\ \boxed{)}\ \boxed{=}}_{\textit{Bước 2}}$$

Trên màn hình hiện kết quả 0.631914312, đó là giá trị gần đúng của $\arctan(\sqrt{3} - 1)$.

Luyện tập

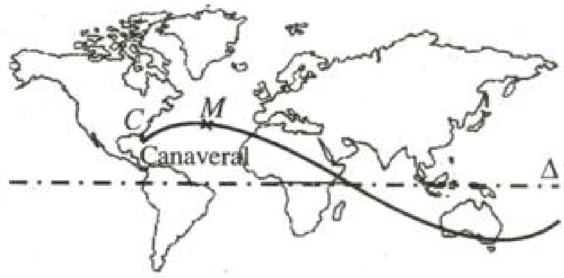
23. Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau :

a) $y = \dfrac{1 - \cos x}{2\sin x + \sqrt{2}}$; b) $y = \dfrac{\sin(x-2)}{\cos 2x - \cos x}$;

c) $y = \dfrac{\tan x}{1 + \tan x}$; d) $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}\cot 2x + 1}$.

24. Giả sử một con tàu vũ trụ được phóng lên từ mũi Ca-na-vơ-ran (Canaveral) ở Mĩ. Nó chuyển động theo một quỹ đạo được mô tả trên một bản đồ phẳng (quanh đường xích đạo) của mặt đất như hình 1.23 : điểm M mô tả cho con tàu, đường thẳng Δ mô tả cho đường xích đạo. Khoảng cách h (kilômet) từ M đến Δ được tính theo công thức $h = |d|$, trong đó

$$d = 4000\cos\left[\frac{\pi}{45}(t-10)\right],$$



Hình 1.23

với t (phút) là thời gian trôi qua kể từ khi con tàu đi vào quỹ đạo, $d > 0$ nếu M ở phía trên Δ, $d < 0$ nếu M ở phía dưới Δ.

a) Giả thiết rằng con tàu đi vào quỹ đạo ngay từ khi phóng lên tại mũi Ca-na-vơ-ran (tức là ứng với $t = 0$). Hãy tính khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng Δ, trong đó C là điểm trên bản đồ biểu diễn cho mũi Ca-na-vơ-ran.

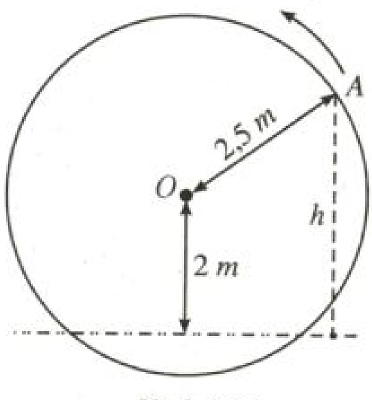
b) Tìm thời điểm sớm nhất sau khi con tàu đi vào quỹ đạo để có $d = 2000$.

c) Tìm thời điểm sớm nhất sau khi con tàu đi vào quỹ đạo để có $d = -1236$.

(Tính chính xác các kết quả đến hàng phần nghìn).

25. Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính 2,5m ; trục của nó đặt cách mặt nước 2m (h. 1.24). Khi guồng quay đều, khoảng cách h (mét) từ một chiếc gầu gắn tại điểm A của guồng đến mặt nước được tính theo công thức $h = |y|$, trong đó

$$y = 2 + 2{,}5\sin\left[2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right)\right],$$



Hình 1.24

với x là thời gian quay của guồng ($x \geq 0$), tính bằng phút ; ta quy ước rằng $y > 0$ khi gầu ở bên trên mặt nước và $y < 0$ khi gầu ở dưới nước (xem *bài đọc thêm* về dao động điều hoà trang 15). Hỏi :

a) Khi nào thì chiếc gầu ở vị trí thấp nhất ?

b) Khi nào thì chiếc gầu ở vị trí cao nhất ?

c) Chiếc gầu cách mặt nước 2m lần đầu tiên khi nào ?

26. Dùng công thức biến đổi tổng thành tích, giải các phương trình sau :

a) $\cos 3x = \sin 2x$;

b) $\sin(x - 120^\circ) - \cos 2x = 0$.