§ 4 VI PHÂN

1. Vi phân của hàm số tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0. Khi đó ta có

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Đẳng thức trên cho thấy : Nếu $|\Delta x|$ khá nhỏ thì tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ rất gần với $f'(x_0)$, do đó ta có thể coi rằng $f'(x_0) \approx \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$,

hay $$\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x. \quad (1)$$

Ta có khái niệm vi phân của hàm số tại một điểm như sau :

> Tích $f'(x_0)\Delta x$ được gọi là *vi phân* của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 (ứng với số gia Δx) và được kí hiệu là $\mathrm{d}f(x_0)$, tức là
>
> $$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\Delta x.$$

Ví dụ 1

Vi phân của hàm số $f(x) = \sin x$ tại điểm $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$ là

$$df\left(\frac{\pi}{4}\right) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \Delta x = \cos\frac{\pi}{4} \cdot \Delta x = \frac{\sqrt{2}}{2}.\Delta x. \qquad \square$$

H1 *Tính vi phân của hàm số* $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ *tại điểm* $x_0 = 2$, *ứng với* Δx *lần lượt bằng* 0,2 *và* 0,02 (*làm tròn kết quả đến hàng* 10^{-3}).

2. Ứng dụng của vi phân vào tính gần đúng

Từ (1) và định nghĩa vi phân của hàm số tại một điểm, ta thấy :

Khi $|\Delta x|$ khá nhỏ thì số gia của hàm số tại điểm x_0 ứng với số gia Δx xấp xỉ bằng vi phân của hàm số tại x_0 ứng với số gia Δx đó, tức là

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x.$$

Từ đó ta có

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.} \qquad (2)$$

Công thức (2) cho phép ta tính xấp xỉ giá trị của hàm số f tại điểm $x_0 + \Delta x$ khi việc tính các giá trị $f(x_0)$ và $f'(x_0)$ là khá đơn giản.

Ví dụ 2. Tính giá trị của sin30°30' (lấy 4 chữ số thập phân trong kết quả).

Giải

Do $30°30' = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{360}$ nên ta sẽ xét hàm số $f(x) = \sin x$ tại điểm $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$ với số gia $\Delta x = \dfrac{\pi}{360}$. Áp dụng công thức (2), ta được

$$f\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{360}\right) \approx f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f'\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \frac{\pi}{360}, \text{ hay}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{360}\right) \approx \sin\frac{\pi}{6} + \left(\cos\frac{\pi}{6}\right)\frac{\pi}{360} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{360} \approx 0{,}5076.$$

Vậy $\sin 30°30' = \sin\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{360}\right) \approx 0{,}5076.$ $\square$

Nhận xét

Nếu dùng máy tính bỏ túi, ta tính được $\sin 30°30' \approx 0{,}5075$. So sánh với kết quả trên, ta thấy việc áp dụng công thức (2) cho ta kết quả khá chính xác.

3. Vi phân của hàm số

Nếu hàm số f có đạo hàm f' thì tích $f'(x)\Delta x$ gọi là vi phân của hàm số $y = f(x)$, kí hiệu là

$$df(x) = f'(x)\Delta x. \quad (3)$$

Đặc biệt với hàm số $y = x$, ta có $dx = (x)'\Delta x = \Delta x$. Do đó ta có thể viết (3) dưới dạng

$$\boxed{df(x) = f'(x)dx \text{ hay } dy = y'dx.}$$

Ví dụ 3

a) $d(x^3 - 2x^2 + 1) = (x^3 - 2x^2 + 1)'dx = (3x^2 - 4x)dx = x(3x - 4)dx.$

b) $d(\sin^2 x) = (\sin^2 x)'dx = (2\sin x\cos x)dx = (\sin 2x)dx.$ □

H2 *Hãy chọn phương án trả lời đúng trong các phương án đã cho đối với mỗi trường hợp sau đây :*

a) Vi phân của hàm số $y = \sqrt{x^2 + 3x - 1}$ *là :*

(A) $dy = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 3x - 1}}dx$; (B) $dy = \dfrac{2x + 3}{\sqrt{x^2 + 3x - 1}}dx$;

(C) $dy = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 + 3x - 1}}dx$; (D) $dy = \dfrac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x - 1}}dx$.

b) Vi phân của hàm số $y = \sin 3x$ *là :*

(A) $dy = 3\cos 3x\, dx$; (B) $dy = 3\sin 3x\, dx$;

(C) $dy = -3\cos 3x dx$; (D) $dy = -3\sin 3x\, dx$.

Câu hỏi và bài tập

39. Tính vi phân của hàm số $f(x) = \sin 2x$ tại điểm $x = \dfrac{\pi}{3}$ ứng với $\Delta x = 0{,}01$; $\Delta x = 0{,}001$.

40. Tính vi phân của các hàm số sau :

a) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{a+b}$ (a và b là các hằng số) ;

b) $y = x\sin x$;

c) $y = x^2 + \sin^2 x$;

d) $y = \tan^3 x$.

41. Áp dụng công thức (2), tìm giá trị gần đúng của các số sau (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

a) $\dfrac{1}{0,9995}$;

b) $\sqrt{0,996}$;

c) $\cos 45°30'$.