§ 2 ÁP DỤNG MỆNH ĐỀ VÀO SUY LUẬN TOÁN HỌC

1. Định lí và chứng minh định lí

Ví dụ 1. Xét định lí "Nếu n là số tự nhiên lẻ thì $n^2 - 1$ chia hết cho 4".

Định lí này được hiểu một cách đầy đủ là "Với mọi số tự nhiên n, nếu n là số lẻ thì $n^2 - 1$ chia hết cho 4".

Trong toán học, ***định lí*** *là một mệnh đề đúng. Nhiều định lí được phát biểu dưới dạng*

$$"\forall x \in X, P(x) \Rightarrow Q(x)", \quad (1)$$

trong đó $P(x)$ và $Q(x)$ là những mệnh đề chứa biến, X là một tập hợp nào đó.

Chứng minh định lí *dạng (1) là dùng suy luận và những kiến thức đã biết để khẳng định rằng mệnh đề (1) là đúng, tức là cần chứng tỏ rằng với mọi x thuộc X mà $P(x)$ đúng thì $Q(x)$ đúng.*

Có thể chứng minh định lí dạng (1) một cách trực tiếp hoặc gián tiếp.

• Phép chứng minh trực tiếp gồm các bước sau :

– Lấy x tuỳ ý thuộc X mà $P(x)$ đúng ;

– Dùng suy luận và những kiến thức toán học đã biết để chỉ ra rằng $Q(x)$ đúng.

Ví dụ 2. Hãy chứng minh trực tiếp định lí nêu ở ví dụ 1.

Chứng minh. Cho n là số tự nhiên lẻ tuỳ ý. Khi đó, $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Suy ra $n^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k(k + 1)$ chia hết cho 4. □

Đôi khi việc chứng minh trực tiếp một định lí gặp khó khăn. Khi đó, ta dùng cách chứng minh gián tiếp. Một cách chứng minh gián tiếp hay được dùng là chứng minh bằng phản chứng.

• Phép chứng minh phản chứng gồm các bước sau :

– Giả sử tồn tại x_0 thuộc X sao cho $P(x_0)$ đúng và $Q(x_0)$ sai, tức là mệnh đề (1) là mệnh đề sai ;

– Dùng suy luận và những kiến thức toán học đã biết để đi đến mâu thuẫn.

Ví dụ 3. Chứng minh bằng phản chứng định lí "Trong mặt phẳng, cho hai đường thẳng a và b song song với nhau. Khi đó, mọi đường thẳng cắt a thì phải cắt b".

Chứng minh. Giả sử tồn tại đường thẳng c cắt a nhưng song song với b. Gọi M là giao điểm của a và c. Khi đó, qua M có hai đường thẳng a và c phân biệt cùng song song với b. Điều này mâu thuẫn với tiên đề Ơ-clít. □

H1 *Chứng minh bằng phản chứng định lí "Với mọi số tự nhiên n, nếu $3n + 2$ là số lẻ thì n là số lẻ".*

2. Điều kiện cần, điều kiện đủ

Cho định lí dưới dạng

$$\text{"}\forall x \in X, P(x) \Rightarrow Q(x)\text{"}. \quad (1)$$

$P(x)$ được gọi là giả thiết và $Q(x)$ là kết luận của định lí.

Định lí dạng (1) còn được phát biểu :

*$P(x)$ là **điều kiện đủ** để có $Q(x)$*

hoặc

*$Q(x)$ là **điều kiện cần** để có $P(x)$.*

Ví dụ 4. Xét định lí "Với mọi số tự nhiên n, nếu n chia hết cho 24 thì nó chia hết cho 8".

Khi đó, ta nói "n chia hết cho 24 là điều kiện đủ để n chia hết cho 8" hoặc cũng nói "n chia hết cho 8 là điều kiện cần để n chia hết cho 24". □

H2 *Định lí trong ví dụ 4 có dạng "$\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow Q(n)$". Hãy phát biểu hai mệnh đề chứa biến $P(n)$ và $Q(n)$.*

3. Định lí đảo, điều kiện cần và đủ

Xét mệnh đề đảo của định lí dạng (1)

$$\text{"}\forall x \in X, Q(x) \Rightarrow P(x)\text{"}. \quad (2)$$

Mệnh đề (2) có thể đúng, có thể sai. Nếu mệnh đề (2) đúng thì nó được gọi là ***định lí đảo*** của định lí dạng (1). Lúc đó định lí dạng (1) sẽ được gọi là ***định lí thuận***. Định lí thuận và đảo có thể viết gộp thành một định lí

$$\text{"}\forall x \in X, P(x) \Leftrightarrow Q(x)\text{"}.$$

Khi đó, ta nói

*$P(x)$ là **điều kiện cần và đủ** để có $Q(x)$.*

Ngoài ra, ta còn nói "$P(x)$ nếu và chỉ nếu $Q(x)$" hoặc "$P(x)$ khi và chỉ khi $Q(x)$" hoặc "Điều kiện cần và đủ để có $P(x)$ là có $Q(x)$".

H3 *Xét định lí "Với mọi số nguyên dương n, n không chia hết cho 3 khi và chỉ khi n^2 chia cho 3 dư 1".*
Sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần và đủ" để phát biểu định lí trên.

Câu hỏi và bài tập

6. Phát biểu mệnh đề đảo của định lí "Trong một tam giác cân, hai đường cao ứng với hai cạnh bên thì bằng nhau". Mệnh đề đảo đó đúng hay sai ?

7. Chứng minh định lí sau bằng phản chứng :

"Nếu a, b là hai số dương thì $a+b \geq 2\sqrt{ab}$".

8. Sử dụng thuật ngữ "điều kiện đủ" để phát biểu định lí "Nếu a và b là hai số hữu tỉ thì tổng $a + b$ cũng là số hữu tỉ".

9. Sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần" để phát biểu định lí "Nếu một số tự nhiên chia hết cho 15 thì nó chia hết cho 5".

10. Sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần và đủ" để phát biểu định lí "Một tứ giác nội tiếp được trong một đường tròn khi và chỉ khi tổng hai góc đối diện của nó là 180^o".

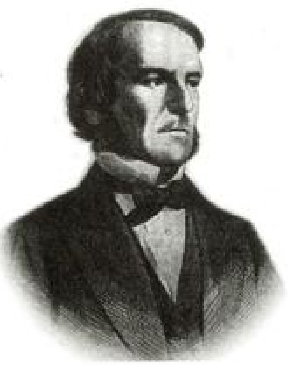
11. Chứng minh định lí sau bằng phản chứng :

"Nếu n là số tự nhiên và n^2 chia hết cho 5 thì n chia hết cho 5".

Em có biết

ĐÔI NÉT VỀ GIOÓC-GIƠ BUN NGƯỜI SÁNG LẬP RA LÔGIC TOÁN

Gioóc-giơ Bun sinh ngày 2-11-1815 ở Luân Đôn. Ông là con trai một nhà bán tạp hoá nhỏ. Vì nhà nghèo nên từ năm 16 tuổi ông đã phải tìm việc làm để kiếm tiền đỡ đần cha mẹ. Ông bắt đầu dạy học từ khi đó. Năm 20 tuổi, ông mở một trường tư ở quê nhà. Vừa cặm cụi dạy học, ông vừa ra sức tự học, tích luỹ vốn kiến thức toán học.



Gioóc-giơ Bun
(*George Boole*, 1815 – 1864)

Hoàn toàn bằng các kiến thức tự học, ông đã bắt tay vào nghiên cứu với một niềm say mê lớn lao trong hoàn cảnh kinh tế khó khăn thiếu thốn. Với năng khiếu, sự thông minh và niềm say mê toán học, ông đã đạt được một số kết quả và bắt đầu nổi tiếng nhờ những công trình của mình như : "Giải tích toán học của lôgic", "Các định luật của tư duy". Nhờ đó, ông được bổ nhiệm làm Giáo sư toán của trường Nữ hoàng ở Ai-len (Ireland) từ năm 1849 cho đến cuối đời. Một điều khá thú vị là người con gái của ông chính là nữ văn sĩ Ê-ten Bun (Eten Boole), tác giả của cuốn tiểu thuyết "Ruồi trâu" rất nổi tiếng.

Ông mất ngày 8-12-1864, thọ 49 tuổi. Cuộc đời và sự nghiệp của ông là một tấm gương sáng đáng để chúng ta noi theo về tinh thần khắc phục khó khăn, lao động cần cù, kiên nhẫn học tập và say mê nghiên cứu, sáng tạo.

Luyện tập

12. Điền dấu "×" vào ô thích hợp trong bảng sau :

Câu	Không là mệnh đề	Mệnh đề đúng	Mệnh đề sai
$2^4 - 1$ chia hết cho 5.			
153 là số nguyên tố.			
Cấm đá bóng ở đây !			
Bạn có máy tính không ?			

13. Nêu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau :

a) Tứ giác *ABCD* đã cho là một hình chữ nhật ;

b) 9801 là số chính phương.

14. Cho tứ giác *ABCD*. Xét hai mệnh đề

P : "Tứ giác *ABCD* có tổng hai góc đối là 180°" ;

Q : "Tứ giác *ABCD* là tứ giác nội tiếp".

Hãy phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và cho biết mệnh đề này đúng hay sai.

15. Xét hai mệnh đề

P : "4686 chia hết cho 6" ; Q : "4686 chia hết cho 4".

Hãy phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và cho biết mệnh đề này đúng hay sai.

16. Cho tam giác ABC. Xét mệnh đề "Tam giác ABC là tam giác vuông tại A nếu và chỉ nếu $AB^2 + AC^2 = BC^2$". Khi viết mệnh đề này dưới dạng $P \Leftrightarrow Q$, hãy nêu mệnh đề P và mệnh đề Q.

17. Cho mệnh đề chứa biến $P(n)$: "$n = n^2$" với n là số nguyên. Điền dấu "×" vào ô vuông thích hợp.

a) $P(0)$ Đúng ☐ Sai ☐

b) $P(1)$ Đúng ☐ Sai ☐

c) $P(2)$ Đúng ☐ Sai ☐

d) $P(-1)$ Đúng ☐ Sai ☐

e) $\exists n \in \mathbb{Z}, P(n)$ Đúng ☐ Sai ☐

g) $\forall n \in \mathbb{Z}, P(n)$ Đúng ☐ Sai ☐.

18. Nêu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau :

a) Mọi học sinh trong lớp em đều thích môn Toán ;

b) Có một học sinh trong lớp em chưa biết sử dụng máy tính ;

c) Mọi học sinh trong lớp em đều biết đá bóng ;

d) Có một học sinh trong lớp em chưa bao giờ được tắm biển.

19. Xác định xem các mệnh đề sau đây đúng hay sai và nêu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề đó :

a) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 1$;

b) $\exists n \in \mathbb{N}, n(n+1)$ là một số chính phương ;

c) $\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)^2 \neq x - 1$;

d) $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ không chia hết cho 4.

20. Chọn phương án trả lời đúng trong các phương án đã cho sau đây.

Mệnh đề "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 2$" khẳng định rằng :

(A) Bình phương của mỗi số thực bằng 2.

(B) Có ít nhất một số thực mà bình phương của nó bằng 2.

(C) Chỉ có một số thực có bình phương bằng 2.

(D) Nếu x là một số thực thì $x^2 = 2$.

21. Kí hiệu X là tập hợp các cầu thủ x trong đội tuyển bóng rổ, $P(x)$ là mệnh đề chứa biến "x cao trên 180 cm".

Chọn phương án trả lời đúng trong các phương án đã cho sau đây.

Mệnh đề "$\forall x \in X, P(x)$" khẳng định rằng :

(A) Mọi cầu thủ trong đội tuyển bóng rổ đều cao trên 180 cm.

(B) Trong số các cầu thủ của đội tuyển bóng rổ có một số cầu thủ cao trên 180 cm.

(C) Bất cứ ai cao trên 180 cm đều là cầu thủ của đội tuyển bóng rổ.

(D) Có một số người cao trên 180 cm là cầu thủ của đội tuyển bóng rổ.