§ 1 BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

1. Ôn tập và bổ sung tính chất của bất đẳng thức

Giả sử a và b là hai số thực. Các mệnh đề "$a > b$", "$a < b$", "$a \geq b$", "$a \leq b$" được gọi là những *bất đẳng thức*.

Cũng như các mệnh đề lôgic khác, một bất đẳng thức có thể *đúng* hoặc *sai*.

Chứng minh một bất đẳng thức là chứng minh bất đẳng thức đó đúng.

Dưới đây là một số tính chất đã biết của bất đẳng thức.

$a > b$ và $b > c \Rightarrow a > c$
$a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$
Nếu $c > 0$ thì $a > b \Leftrightarrow ac > bc$.
Nếu $c < 0$ thì $a > b \Leftrightarrow ac < bc$.

Từ đó ta có các hệ quả sau :

$a > b$ và $c > d \Rightarrow a + c > b + d$;

$a + c > b \Leftrightarrow a > b - c$;

$a > b \geq 0$ và $c > d \geq 0 \Rightarrow ac > bd$;

$a > b \geq 0$ và $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a^n > b^n$;

$a > b \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}$;

$a > b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b}$.

Ví dụ 1. Không dùng bảng số hoặc máy tính, hãy so sánh hai số $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ và 3.

Giải. Giả sử $\sqrt{2} + \sqrt{3} \leq 3$. Do hai vế của bất đẳng thức đó đều dương nên

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \leq 3 \Leftrightarrow (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 \leq 9 \Leftrightarrow 5 + 2\sqrt{6} \leq 9$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{6} \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{6} \leq 2 \Leftrightarrow 6 \leq 4, \text{ vô lí.}$$

Vậy $\sqrt{2} + \sqrt{3} > 3$. □

Nếu A, B là những biểu thức chứa biến thì "$A > B$" là một mệnh đề chứa biến. Chứng minh bất đẳng thức $A > B$ (với điều kiện nào đó của các biến), nghĩa là chứng minh mệnh đề chứa biến $A > B$ đúng với tất cả các giá trị của các biến (thoả mãn điều kiện đó).

Từ nay, ta quy ước : Khi nói ta có bất đẳng thức $A > B$ (trong đó A và B là những biểu thức chứa biến) mà không nêu điều kiện đối với các biến thì ta hiểu rằng bất đẳng thức đó xảy ra với mọi giá trị của biến thuộc $\mathbb{R}$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng $x^2 > 2(x-1)$.

Giải. $x^2 > 2(x-1) \Leftrightarrow x^2 > 2x-2 \Leftrightarrow x^2-2x+2>0$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+1+1>0 \Leftrightarrow (x-1)^2+1>0.$$

Hiển nhiên $(x-1)^2+1>0$ với mọi x nên ta có bất đẳng thức cần chứng minh. □

Ví dụ 3. Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thì

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \le abc.$$

Giải. Ta có các bất đẳng thức hiển nhiên sau :

$$a^2 \ge a^2-(b-c)^2 = (a-b+c)(a+b-c)$$

$$b^2 \ge b^2-(c-a)^2 = (b-c+a)(b+c-a)$$

$$c^2 \ge c^2-(a-b)^2 = (c-a+b)(c+a-b).$$

Do a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên tất cả các vế của các bất đẳng thức trên đều dương. Nhân các vế tương ứng của ba bất đẳng thức trên, ta được

$$a^2b^2c^2 \ge (b+c-a)^2(c+a-b)^2(a+b-c)^2.$$

Lấy căn bậc hai của hai vế, ta được bất đẳng thức cần chứng minh. □

2. Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối

Từ định nghĩa giá trị tuyệt đối, ta suy ra các tính chất sau đây.

$-|a| \le a \le |a|$ với mọi $a \in \mathbb{R}$.

$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$ (với $a > 0$).

$|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ hoặc $x > a$ (với $a > 0$).

Sau đây là hai bất đẳng thức quan trọng khác về giá trị tuyệt đối (viết dưới dạng bất đẳng thức kép).

$$|a| - |b| \le |a + b| \le |a| + |b| \text{ (với mọi } a, b \in \mathbb{R}).$$

Ta chứng minh bất đẳng thức $|a+b| \le |a| + |b|$. Thật vậy

$$|a+b| \le |a| + |b| \Leftrightarrow (a+b)^2 \le a^2 + 2|ab| + b^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \le a^2 + 2|ab| + b^2 \Leftrightarrow ab \le |ab|.$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng nên ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

H1 *Sử dụng bất đẳng thức vừa chứng minh và đẳng thức $|a| = |a + b + (-b)|$ để chứng minh bất đẳng thức $|a| - |b| \le |a+b|$.*

3. Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân[1]

a) Đối với hai số không âm

Ta đã biết $\frac{a+b}{2}$ là trung bình cộng của hai số a và b. Khi a và b không âm thì $\sqrt{ab}$ gọi là trung bình nhân của chúng. Ta có định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ

Với mọi $a \ge 0$, $b \ge 0$ ta có

$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Nói cách khác, *trung bình cộng của hai số không âm lớn hơn hoặc bằng trung bình nhân của chúng. Trung bình cộng của hai số không âm bằng trung bình nhân của chúng khi và chỉ khi hai số đó bằng nhau.*

(1) Người ta còn gọi là bất đẳng thức Cô-si (Augustin-Louis Cauchy, 1789 – 1857).

Chứng minh. Với $a \geq 0$, $b \geq 0$, ta có

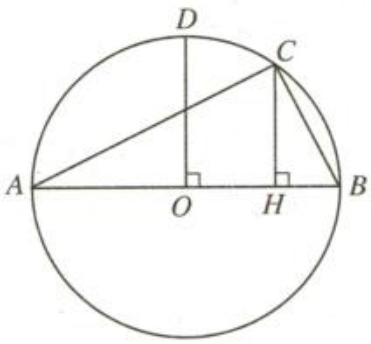
$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(a+b-2\sqrt{ab}) = \frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0.$$

Do đó

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = 0$, tức là $a = b$. □

H2 *Trong hình 4.1, cho AH = a, BH = b. Hãy tính các đoạn OD và HC theo a và b. Từ đó suy ra bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân của a và b.*



Hình 4.1

Ví dụ 4. Chứng minh rằng nếu a, b, c là ba số dương bất kì thì

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 6.$$

Giải. Ta có

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{b}$$

$$= \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}} + 2\sqrt{\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{b}} + 2\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{c}} = 6.$$ □

HỆ QUẢ

Nếu hai số dương thay đổi nhưng có tổng không đổi thì tích của chúng lớn nhất khi và chỉ khi hai số đó bằng nhau.

Nếu hai số dương thay đổi nhưng có tích không đổi thì tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi hai số đó bằng nhau.

Chứng minh. Giả sử hai số dương x và y có tổng $x + y = S$ không đổi. Khi đó, $\frac{S}{2} = \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ nên $xy \leq \frac{S^2}{4}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Do đó, tích xy đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{S^2}{4}$ khi và chỉ khi $x = y$.

Giả sử hai số dương x và y có tích $xy = P$ không đổi. Khi đó

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} = \sqrt{P} \text{ nên } x + y \geq 2\sqrt{P}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$. Do đó, tổng $x + y$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2\sqrt{P}$ khi và chỉ khi $x = y$. □

ỨNG DỤNG

Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng chu vi, hình vuông có diện tích lớn nhất.

Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng diện tích, hình vuông có chu vi nhỏ nhất.

Ví dụ 5. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{3}{x}$ với $x > 0$.

Giải. Do $x > 0$ nên ta có $f(x) = x + \frac{3}{x} \geq 2\sqrt{x.\frac{3}{x}} = 2\sqrt{3}$ và

$$f(x) = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{3}{x} \Leftrightarrow x = \sqrt{3}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{3}{x}$ với $x > 0$ là $f(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$.

b) Đối với ba số không âm

Ta đã biết $\frac{a+b+c}{3}$ là trung bình cộng của ba số a, b, c. Ta gọi $\sqrt[3]{abc}$ là trung bình nhân của ba số đó. Người ta cũng chứng minh được kết quả tương tự định lí trên cho trường hợp ba số không âm.

> Với mọi $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, ta có
>
> $$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$
>
> Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Nói cách khác, *trung bình cộng của ba số không âm lớn hơn hoặc bằng trung bình nhân của chúng. Trung bình cộng của ba số không âm bằng trung bình nhân của chúng khi và chỉ khi ba số đó bằng nhau.*

Ví dụ 6. Chứng minh rằng nếu a, b, c là ba số dương thì

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9.$$

Khi nào xảy ra đẳng thức ?

Giải. Vì a, b, c là ba số dương nên

$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ (đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$) và

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$ $\left(\text{đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c}\right)$.

Do đó $\quad (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 3\sqrt[3]{abc}.3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} = 9.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a=b=c \\ \frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c}. \end{cases}$

Vậy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. □

H3 *Phát biểu kết quả tương tự hệ quả ở phần a) cho trường hợp ba số dương.*

Câu hỏi và bài tập

1. Chứng minh rằng, nếu $a > b$ và $ab > 0$ thì $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

2. Chứng minh rằng nửa chu vi của một tam giác lớn hơn độ dài mỗi cạnh của tam giác đó.

3. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ với mọi số thực a, b, c. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

4. Hãy so sánh các kết quả sau đây :

a) $\sqrt{2000} + \sqrt{2005}$ và $\sqrt{2002} + \sqrt{2003}$ (không dùng bảng số hoặc máy tính) ;

b) $\sqrt{a+2} + \sqrt{a+4}$ và $\sqrt{a} + \sqrt{a+6}$ $(a \geq 0)$.

5. Chứng minh rằng, nếu $a > 0$ và $b > 0$ thì $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$.

6. Chứng minh rằng, nếu $a \geq 0$ và $b \geq 0$ thì $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$. Đẳng thức xảy ra khi nào ?

7. a) Chứng minh rằng $a^2 + ab + b^2 \geq 0$ với mọi số thực a, b.

b) Chứng minh rằng với hai số thực a, b tuỳ ý, ta có $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$.

8. Chứng minh rằng, nếu a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác thì

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca).$$

9. Chứng minh rằng, nếu $a \geq 0$ và $b \geq 0$ thì

$$\frac{a+b}{2} \times \frac{a^2+b^2}{2} \leq \frac{a^3+b^3}{2}.$$

10. a) Chứng minh rằng, nếu $x \geq y \geq 0$ thì $\frac{x}{1+x} \geq \frac{y}{1+y}$.

b) Chứng minh rằng đối với hai số tuỳ ý a, b, ta có $\frac{|a-b|}{1+|a-b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$.

11. Chứng minh rằng :

a) Nếu a, b là hai số cùng dấu thì $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$;

b) Nếu a, b là hai số trái dấu thì $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$.

12. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = (x+3)(5-x)$ với $-3 \leq x \leq 5$.

13. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{2}{x-1}$ với $x > 1$.

Bài đọc thêm

BẤT ĐẲNG THỨC BU-NHI-A-CỐP-XKI[1]

1. Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki đối với hai cặp số thực

Với hai cặp số thực (a,b) và (x,y) ta có

$$(ax+by)^2 \le (a^2+b^2)(x^2+y^2).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ay = bx$.

Chứng minh.

Dễ dàng chứng minh đẳng thức sau :

$$(ax+by)^2 + (ay-bx)^2 = (a^2+b^2)(x^2+y^2).$$

Mặt khác, do $(ay-bx)^2 \ge 0$ nên

$$(ax+by)^2 + (ay-bx)^2 \ge (ax+by)^2.$$

Từ đó suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ay - bx = 0$, tức là $ay = bx$.

Chú ý. Khi $xy \ne 0$, điều kiện $ay = bx$ còn được viết dưới dạng $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.

2. Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki đối với hai bộ ba số thực

Có thể chứng minh kết quả sau :

Với hai bộ ba số thực (a_1, a_2, a_3),(b_1, b_2, b_3), ta có

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2).$$

Nếu $b_1\, b_2\, b_3 \ne 0$ thì đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$.

Ví dụ. Chứng minh rằng nếu $a^2 + 2b^2 + 9c^2 = 3$ thì $a + 2b + 9c \le 6$.

Giải. Ta có $(a+2b+9c)^2 = (a.1 + \sqrt{2}\,b.\sqrt{2} + 3c.3)^2 \le$

$\le [a^2 + (\sqrt{2}\,b)^2 + (3c)^2]\,[1^2 + (\sqrt{2})^2 + 3^2] = 12\,(a^2 + 2b^2 + 9c^2) = 36.$

Vì vậy $a + 2b + 9c \le 6$. □

(1) Viktor Yakovlevich Bunyakovsky (1804 – 1889), nhà toán học Nga.

Luyện tập

14. Chứng minh rằng nếu a, b, c là ba số dương thì

$$\frac{a^4}{b} + \frac{b^4}{c} + \frac{c^4}{a} \geq 3abc.$$

15. Một khách hàng đến một cửa hàng bán hoa quả mua 2 kg cam đã yêu cầu cân hai lần. Lần đầu, người bán hàng đặt quả cân 1 kg lên đĩa cân bên phải và đặt cam lên đĩa cân bên trái cho đến khi cân thăng bằng và lần sau, đặt quả cân 1 kg lên đĩa cân bên trái và đặt cam lên đĩa cân bên phải cho đến khi cân thăng bằng. Nếu cái cân đĩa đó không chính xác (do hai cánh tay đòn dài, ngắn khác nhau) nhưng quả cân là đúng 1 kg thì khách hàng có mua được đúng 2 kg cam hay không ? Vì sao ?

16. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có :

a) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} < 1$;

Hướng dẫn. Viết $\frac{1}{1.2} = 1 - \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, ...

b) $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} < 2.$

17. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \sqrt{x-1} + \sqrt{4-x}.$$

18. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b và c, ta có

$$(a+b+c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

19. Chứng minh rằng nếu a, b, c, d là bốn số không âm thì $\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4 \geq abcd.$

20. Chứng minh rằng :

a) Nếu $x^2 + y^2 = 1$ thì $|x+y| \leq \sqrt{2}$; b) Nếu $4x - 3y = 15$ thì $x^2 + y^2 \geq 9$.