

§ 7

BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1. Định nghĩa và cách giải

Bất phương trình bậc hai (*ẩn x*) là bất phương trình có một trong các dạng $f(x) > 0, f(x) < 0, f(x) \geq 0, f(x) \leq 0$, trong đó $f(x)$ là một tam thức bậc hai.

Cách giải. Để giải bất phương trình bậc hai, ta áp dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai.

Ví dụ 1. Giải bất phương trình

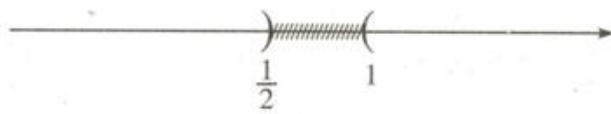
$$2x^2 - 3x + 1 > 0. \quad (1)$$

Giải. Tam thức bậc hai $2x^2 - 3x + 1$ có hai nghiệm $x_1 = \frac{1}{2}$ và $x_2 = 1$ và có hệ số $a = 2 > 0$ nên

$$2x^2 - 3x + 1 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2} \text{ hoặc } x > 1.$$

Vậy tập nghiệm của (1) là $(-\infty ; \frac{1}{2}) \cup (1 ; +\infty)$.

Ta biểu diễn tập nghiệm của (1) trên trục số (h.4.9). □



Hình 4.9

[H1] Tim tập nghiệm của các bất phương trình sau :

$$a) x^2 + 5x + 4 < 0; \quad b) -3x^2 + 2\sqrt{3}x < 1; \quad c) 4x - 5 \leq \frac{7}{3}x^2.$$

2. Bất phương trình tích và bất phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Ví dụ 2. Giải bất phương trình

$$\frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 5x + 6} \geq 0.$$

Giải. Ta xét dấu của biểu thức

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 5x + 6}.$$

Tử thức là tam thức bậc hai có hai nghiệm -2 và $\frac{1}{2}$.

Mẫu thức là tam thức bậc hai có hai nghiệm 2 và 3 .

Dấu của $f(x)$ được cho trong bảng sau

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	2	3	$+\infty$
$2x^2 + 3x - 2$	+	0	-	0	+	+
$x^2 - 5x + 6$	+		+		0	-
$f(x)$	+	0	-	0	+	+

Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$(-\infty; -2] \cup \left[\frac{1}{2}; 2\right) \cup (3; +\infty).$$

□

H2 Giải bất phương trình

$$(4-2x)(x^2+7x+12) < 0.$$

Ví dụ 3. Giải bất phương trình

$$\frac{2x^2-16x+27}{x^2-7x+10} \leq 2.$$

Giải. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{2x^2-16x+27}{x^2-7x+10} - 2 \leq 0. \quad (1)$$

Ta có

$$(1) \Leftrightarrow \frac{2x^2-16x+27-2(x^2-7x+10)}{x^2-7x+10} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-2x+7}{x^2-7x+10} \leq 0.$$

Dấu của $f(x) = \frac{-2x+7}{x^2-7x+10}$ được cho trong bảng sau đây.

x	$-\infty$	2	$\frac{7}{2}$	5	$+\infty$
$-2x+7$	+	+	0	-	-
$x^2-7x+10$	+	0	-	-	0
$f(x)$	+	-	0	+	-

Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$\left(2; \frac{7}{2}\right] \cup (5; +\infty).$$

□

3. Hệ bất phương trình bậc hai

Ví dụ 4. Giải hệ bất phương trình

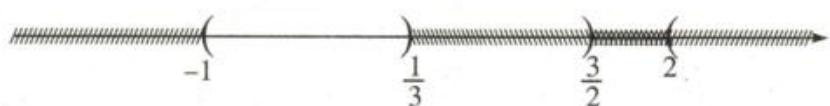
$$(I) \begin{cases} 3x^2 - 7x + 2 > 0 \\ -2x^2 + x + 3 > 0. \end{cases}$$

Cách giải. Muốn giải hệ bất phương trình bậc hai một ẩn, ta giải riêng từng bất phương trình của hệ rồi lấy giao của các tập nghiệm tìm được.

Bất phương trình thứ nhất có tập nghiệm $S_1 = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (2; +\infty)$.

Bất phương trình thứ hai có tập nghiệm $S_2 = \left(-1; \frac{3}{2}\right)$.

Muốn tìm $S_1 \cap S_2$, ta có thể biểu diễn các tập này trên trục số bằng cách lần lượt gạch bỏ các phần không thuộc S_1 và các phần không thuộc S_2 . Phần còn lại không bị gạch là $S = S_1 \cap S_2$ (h.4.10).



Hình 4.10

Từ đó suy ra tập nghiệm của hệ là $S = \left(-1; \frac{1}{3}\right)$.

Trong thực hành, bài giải ví dụ 4 thường được trình bày như sau.

Giải. Ta có

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{3} \text{ hoặc } x > 2 \\ -1 < x < \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < \frac{1}{3}.$$

Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là khoảng $\left(-1; \frac{1}{3}\right)$. □

[H3] Giải hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 2x+1 > 5 \\ 2x^2 - 9x + 7 \leq 0. \end{cases}$$

Ví dụ 5. Tìm các giá trị của m để bất phương trình sau vô nghiệm

$$(m-2)x^2 + 2(m+1)x + 2m > 0.$$

Giải. Đặt $f(x) = (m-2)x^2 + 2(m+1)x + 2m$.

Bất phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi $f(x) \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Với $m = 2$, ta có $f(x) = 6x + 4$. Khi đó, $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{2}{3}$.

Giá trị $m = 2$ không thoả mãn điều kiện đòi hỏi.

Với $m \neq 2$, ta có $f(x) \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta' \leq 0, \\ m - 2 < 0. \end{cases}$

Thay $\Delta' = (m+1)^2 - 2m(m-2) = -m^2 + 6m + 1$ vào hệ trên, ta có

$$\begin{cases} -m^2 + 6m + 1 \leq 0 \\ m - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 3 - \sqrt{10} \text{ hoặc } m \geq 3 + \sqrt{10} \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 3 - \sqrt{10}.$$

Vậy bất phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi

$$m \leq 3 - \sqrt{10}.$$

□

Câu hỏi và bài tập

53. Giải các bất phương trình sau :

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| a) $-5x^2 + 4x + 12 < 0$; | b) $16x^2 + 40x + 25 < 0$; |
| c) $3x^2 - 4x + 4 \geq 0$; | d) $x^2 - x - 6 \leq 0$. |

54. Giải các bất phương trình sau :

- | | |
|---|---|
| a) $\frac{x^2 - 9x + 14}{x^2 - 5x + 4} > 0$; | b) $\frac{-2x^2 + 7x + 7}{x^2 - 3x - 10} \leq -1$; |
| c) $(2x+1)(x^2 + x - 30) \geq 0$; | d) $x^4 - 3x^2 \leq 0$. |

55. Tìm các giá trị của m để mỗi phương trình sau có nghiệm :

- | |
|--|
| a) $(m-5)x^2 - 4mx + m - 2 = 0$; |
| b) $(m+1)x^2 + 2(m-1)x + 2m - 3 = 0$. |

56. Giải các hệ bất phương trình :

- | | |
|---|--|
| a) $\begin{cases} 2x^2 + 9x + 7 > 0 \\ x^2 + x - 6 < 0 \end{cases}$ | b) $\begin{cases} 4x^2 - 5x - 6 \leq 0 \\ -4x^2 + 12x - 5 < 0 \end{cases}$ |
| c) $\begin{cases} -2x^2 - 5x + 4 \leq 0 \\ -x^2 - 3x + 10 \geq 0 \end{cases}$ | d) $\begin{cases} 2x^2 + x - 6 > 0 \\ 3x^2 - 10x + 3 > 0 \end{cases}$ |

Luyện tập

57. Tìm các giá trị của m để phương trình sau có nghiệm

$$x^2 + (m-2)x - 2m + 3 = 0.$$

58. Chứng minh rằng các phương trình sau vô nghiệm dù m lấy bất kì giá trị nào :

a) $x^2 - 2(m+1)x + 2m^2 + m + 3 = 0$; b) $(m^2 + 1)x^2 + 2(m+2)x + 6 = 0$.

59. Tìm các giá trị của m để bất phương trình

$$(m-1)x^2 - 2(m+1)x + 3(m-2) > 0$$

nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

60. Giải các bất phương trình sau :

a) $\frac{x^4 - x^2}{x^2 + 5x + 6} \leq 0$; b) $\frac{1}{x^2 - 5x + 4} < \frac{1}{x^2 - 7x + 10}$.

61. Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau :

a) $y = \sqrt{(2x+5)(1-2x)}$; b) $y = \sqrt{\frac{x^2 + 5x + 4}{2x^2 + 3x + 1}}$.

62. Giải các hệ bất phương trình :

a) $\begin{cases} 4x - 3 < 3x + 4 \\ x^2 - 7x + 10 \leq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x^2 + 9x - 7 > 0 \\ x^2 + x - 6 \leq 0 \end{cases}$
c) $\begin{cases} x^2 - 9 < 0 \\ (x-1)(3x^2 + 7x + 4) \geq 0. \end{cases}$

63. Tìm các giá trị của a sao cho với mọi x , ta luôn có

$$-1 \leq \frac{x^2 + 5x + a}{2x^2 - 3x + 2} < 7.$$

64. Tìm các giá trị của m để hệ bất phương trình sau có nghiệm :

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 15 < 0 \\ (m+1)x \geq 3. \end{cases}$$