§ 5 BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

a) Bất phương trình bậc nhất hai ẩn và miền nghiệm của nó

ĐỊNH NGHĨA

> ***Bất phương trình bậc nhất hai ẩn*** *là bất phương trình có một trong các dạng*
>
> $ax + by + c < 0$, $ax + by + c > 0$, $ax + by + c \le 0$, $ax + by + c \ge 0$,
>
> *trong đó a, b và c là những số cho trước sao cho* $a^2 + b^2 \neq 0$; *x và y là các ẩn.*
>
> *Mỗi cặp số* $(x_0 ; y_0)$ *sao cho* $ax_0 + by_0 + c < 0$ *gọi là* ***một nghiệm*** *của bất phương trình* $ax + by + c < 0$.

Nghiệm của các bất phương trình dạng $ax + by + c > 0$, $ax + by + c \le 0$ và $ax + by + c \ge 0$ được định nghĩa tương tự.

Như vậy trong mặt phẳng toạ độ, mỗi nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn được biểu diễn bởi một điểm và tập nghiệm của nó được biểu diễn bởi một tập hợp điểm. Ta gọi tập hợp điểm ấy là ***miền nghiệm*** của bất phương trình.

Dưới đây, chúng ta sẽ thấy miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn là một nửa mặt phẳng.

b) Cách xác định miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Việc xác định miền nghiệm của một bất phương trình bậc nhất hai ẩn (hay biểu diễn hình học tập nghiệm của nó) trong mặt phẳng toạ độ dựa trên định lí được thừa nhận sau đây.

ĐỊNH LÍ

Trong mặt phẳng toạ độ, đường thẳng $(d) : ax + by + c = 0$ chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng. Một trong hai nửa mặt phẳng ấy (không kể bờ (d)) gồm các điểm có toạ độ thoả mãn bất phương trình $ax + by + c > 0$, nửa mặt phẳng còn lại (không kể bờ (d)) gồm các điểm có toạ độ thoả mãn bất phương trình $ax + by + c < 0$.

Từ định lí, ta suy ra

Nếu $(x_0 ; y_0)$ là một nghiệm của bất phương trình $ax + by + c > 0$ (hay $ax + by + c < 0$) thì nửa mặt phẳng (không kể bờ (d)) chứa điểm $M(x_0 ; y_0)$ chính là miền nghiệm của bất phương trình ấy.

Vậy để xác định miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c < 0$, ta làm như sau :

– Vẽ đường thẳng $(d) : ax + by + c = 0$;

– Xét một điểm $M(x_0 ; y_0)$ không nằm trên (d).

Nếu $ax_0 + by_0 + c < 0$ thì nửa mặt phẳng (không kể bờ (d)) chứa điểm M là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c < 0$.

Nếu $ax_0 + by_0 + c > 0$ thì nửa mặt phẳng (không kể bờ (d)) không chứa điểm M là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by + c < 0$.

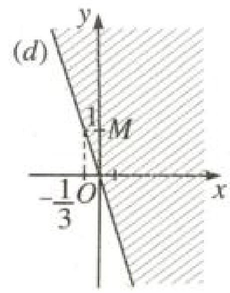
CHÚ Ý

Đối với các bất phương trình dạng $ax + by + c \leq 0$ hoặc $ax + by + c \geq 0$ thì miền nghiệm là nửa mặt phẳng kể cả bờ.

Ví dụ 1. Xác định miền nghiệm của bất phương trình $3x + y \leq 0$.

Giải. Trên mặt phẳng toạ độ, đường thẳng $(d) : 3x + y = 0$ chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng.

Chọn một điểm bất kì không thuộc đường thẳng đó, chẳng hạn điểm $M(0 ; 1)$. Ta thấy $(0 ; 1)$ không phải là nghiệm của bất phương trình đã cho. Vậy miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng bờ (d) không chứa điểm $M(0 ; 1)$. (Trên hình 4.5, miền nghiệm là nửa mặt phẳng không bị gạch). □



Hình 4.5

H1 *Xác định miền nghiệm của bất phương trình* $x + y > 0$.

2. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Dưới đây là một ví dụ về *hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn*

$$\text{(I)} \begin{cases} 3x - y + 3 > 0 \\ -2x + 3y - 6 < 0 \\ 2x + y + 4 > 0. \end{cases}$$

Trong mặt phẳng toạ độ, ta gọi tập hợp các điểm có toạ độ thoả mãn mọi bất phương trình trong hệ là ***miền nghiệm của hệ***. Vậy miền nghiệm của hệ là giao các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.

Để xác định miền nghiệm của hệ, ta dùng phương pháp biểu diễn hình học như sau :

– Với mỗi bất phương trình trong hệ, ta xác định miền nghiệm của nó và gạch bỏ miền còn lại.

– Sau khi làm như trên lần lượt đối với tất cả các bất phương trình trong hệ trên cùng một mặt phẳng toạ độ, miền còn lại không bị gạch chính là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

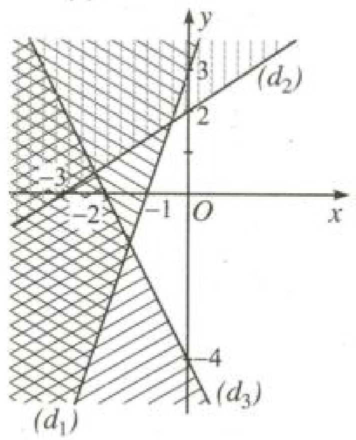
Ví dụ 2. Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình (I).

Giải. Trước hết, ta vẽ ba đường thẳng :

$(d_1) : 3x - y + 3 = 0$;

$(d_2) : -2x + 3y - 6 = 0$;

$(d_3) : 2x + y + 4 = 0$.



Hình 4.6

Thử trực tiếp ta thấy $(0 ; 0)$ là nghiệm của cả ba bất phương trình. Điều đó có nghĩa là gốc toạ độ thuộc cả ba miền nghiệm của ba bất phương trình của hệ (I). Sau khi gạch bỏ các miền không thích hợp, miền không bị gạch trên hình 4.6 (không kể biên) là miền nghiệm của hệ (I). □

H2 *Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình*

$$\begin{cases} y - 3x > 0 \\ x - 2y + 5 < 0 \\ 5x + 2y + 10 > 0. \end{cases}$$

3. Một ví dụ áp dụng vào bài toán kinh tế

Vấn đề tìm miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất có liên quan chặt chẽ đến *Quy hoạch tuyến tính*. Đó là một ngành toán học có nhiều ứng dụng trong đời sống và kinh tế. Sau đây là một ví dụ đơn giản.

Bài toán

Người ta dự định dùng hai loại nguyên liệu để chiết xuất ít nhất 140 kg chất A và 9 kg chất B. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại I giá 4 triệu đồng, có thể chiết xuất được 20 kg chất A và 0,6 kg chất B. Từ mỗi tấn nguyên liệu loại II giá 3 triệu đồng, có thể chiết xuất được 10 kg chất A và 1,5 kg chất B. Hỏi phải dùng bao nhiêu tấn nguyên liệu mỗi loại để chi phí mua nguyên liệu là ít nhất, biết rằng cơ sở cung cấp nguyên liệu chỉ có thể cung cấp không quá 10 tấn nguyên liệu loại I và không quá 9 tấn nguyên liệu loại II ?

Phân tích bài toán. Nếu sử dụng x tấn nguyên liệu loại I và y tấn nguyên liệu loại II thì theo giả thiết, có thể chiết xuất được $(20x + 10y)$ kg chất A và $(0{,}6x + 1{,}5y)$ kg chất B. Theo giả thiết, x và y phải thoả mãn các điều kiện :

$0 \le x \le 10$ và $0 \le y \le 9$;

$20x + 10y \ge 140$, hay $2x + y \ge 14$;

$0{,}6x + 1{,}5y \ge 9$, hay $2x + 5y \ge 30$.

Tổng số tiền mua nguyên liệu là $T(x\,;\,y) = 4x + 3y$.

Bài toán đã cho trở thành : Tìm các số x và y thoả mãn hệ bất phương trình

$$\text{(II)} \begin{cases} 0 \le x \le 10 \\ 0 \le y \le 9 \\ 2x + y \ge 14 \\ 2x + 5y \ge 30, \end{cases}$$

sao cho $T(x\,;\,y) = 4x + 3y$ có giá trị nhỏ nhất.

Bài toán này dẫn đến hai bài toán nhỏ sau :

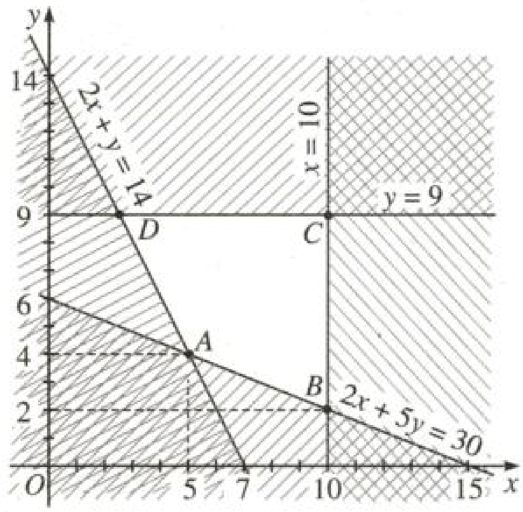
Bài toán 1. Xác định tập hợp (S) các điểm có toạ độ $(x ; y)$ thoả mãn hệ (II).

Bài toán 2. Trong tất cả các điểm thuộc (S), tìm điểm $(x ; y)$ sao cho $T(x ; y)$ có giá trị nhỏ nhất.

• Việc giải bài toán 1 chính là việc xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình (II) mà ta đã lập được.

H3 *Kiểm tra lại rằng miền nghiệm (S) của hệ (II) là miền tứ giác ABCD trên hình 4.7 (kể cả biên).*

• Để giải bài toán 2, ta thừa nhận rằng biểu thức $T(x ; y)$ có giá trị nhỏ nhất và giá trị ấy đạt được tại một trong các đỉnh của tứ giác $ABCD$ (xem bài đọc thêm trang 133). Bằng cách tìm toạ độ các đỉnh A, B, C, D rồi so sánh các giá trị tương ứng của $T(x ; y)$, ta được $T(5 ; 4) = 32$ là giá trị nhỏ nhất.



Hình 4.7

Vậy để chi phí nguyên liệu ít nhất, cần sử dụng 5 tấn nguyên liệu loại I và 4 tấn nguyên liệu loại II (khi đó, chi phí tổng cộng là 32 triệu đồng).

Câu hỏi và bài tập

42. Xác định miền nghiệm của mỗi bất phương trình hai ẩn :

a) $x - 2 + 2(y - 1) > 2x + 4$;

b) $2x - \sqrt{2}\,y + \sqrt{2} - 2 \leq 0$.

43. Xác định miền nghiệm của mỗi hệ bất phương trình hai ẩn :

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} - 1 > 0 \\ 2(x - 1) + \dfrac{y}{2} < 4 \, ; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - 5y + 20 > 0 \\ y > 0 \\ -y + 5 > \dfrac{x - 3}{3}. \end{cases}$

44. Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị prôtêin và 400 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kilôgam thịt bò chứa 800 đơn vị prôtêin và 200 đơn vị lipit. Mỗi kilôgam thịt lợn (heo) chứa 600 đơn vị prôtêin và 400 đơn vị lipit. Biết rằng gia đình này chỉ mua nhiều nhất là 1,6 kg thịt bò và 1,1 kg thịt lợn ; giá tiền 1 kg thịt bò là 45 nghìn đồng, 1 kg thịt lợn là 35 nghìn đồng. Giả sử gia đình đó mua x kilôgam thịt bò và y kilôgam thịt lợn.

a) Viết các bất phương trình biểu thị các điều kiện của bài toán thành một hệ bất phương trình rồi xác định miền nghiệm (S) của hệ đó.

b) Gọi T (nghìn đồng) là số tiền phải trả cho x kilôgam thịt bò và y kilôgam thịt lợn. Hãy biểu diễn T theo x và y.

c) Ở câu a), ta thấy (S) là một miền đa giác. Biết rằng T có giá trị nhỏ nhất tại $(x_0 ; y_0)$ với $(x_0 ; y_0)$ là toạ độ của một trong các đỉnh của (S). Hỏi gia đình đó phải mua bao nhiêu kilôgam thịt mỗi loại để chi phí là ít nhất ?

Bài đọc thêm

MỘT PHƯƠNG PHÁP TÌM CỰC TRỊ CỦA BIỂU THỨC $P(x ; y) = ax + by$ TRÊN MỘT MIỀN ĐA GIÁC LỒI

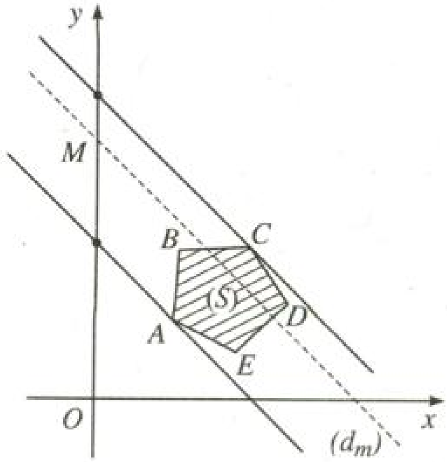
BÀI TOÁN : *Tìm giá trị nhỏ nhất hay lớn nhất của biểu thức* $P(x ; y) = ax + by$ $(b \neq 0)$ *trên một miền đa giác phẳng lồi (kể cả biên).*

Bài toán đó có nghĩa là :

Cho biểu thức $P(x ; y) = ax + by$ $(b \neq 0)$ và một miền đa giác lồi (S), kể cả biên, trong mặt phẳng toạ độ Oxy. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất (hay lớn nhất) của $P(x ; y)$ với $(x ; y)$ là toạ độ của các điểm thuộc (S).

Cách giải. Ta luôn có thể giả thiết rằng $b > 0$, bởi vì nếu $b < 0$ thì ta có thể nhân cả hai vế với -1 và bài toán tìm giá trị nhỏ nhất (hay lớn nhất) của $P(x ; y)$ sẽ trở thành bài toán tìm giá trị lớn nhất (hay nhỏ nhất) của $-P(x ; y) = -ax + b'y$, trong đó $b' = -b > 0$.

Tập các điểm $(x ; y)$ để $P(x ; y)$ nhận giá trị p là đường thẳng $ax + by = p$, hay $y = -\frac{a}{b}x + \frac{p}{b}$. Đường thẳng này có hệ số góc bằng $-\frac{a}{b}$ và cắt trục tung tại điểm $M(0 ; m)$ với $m = \frac{p}{b}$ (h.4.8). Kí hiệu đường thẳng này là (d_m). Vì $b > 0$ nên việc tìm giá trị nhỏ nhất (hay lớn nhất) của $P(x ; y) = p$ với $(x ; y) \in (S)$ quy về việc tìm giá trị nhỏ nhất (hay lớn nhất) của $m = \frac{p}{b}$, tức là tìm điểm M ở vị trí thấp nhất (hay cao nhất) trên trục tung sao cho đường thẳng (d_m) có ít nhất một điểm chung với (S).



Hình 4.8

Từ đó, chú ý rằng (d_m) có hệ số góc bằng $-\frac{a}{b}$ không đổi. Ta đi đến cách làm sau :

• Khi tìm giá trị nhỏ nhất của $P(x ; y)$, ta cho đường thẳng (d_m) chuyển động song song với chính nó từ một vị trí nào đó ở phía dưới miền (S) và đi lên cho đến khi (d_m) lần đầu tiên đi qua một điểm $(x_0 ; y_0)$ nào đó của (S). Khi đó, m đạt giá trị nhỏ nhất và tương ứng với nó là giá trị nhỏ nhất của $P(x ; y)$. Đó là

$$P(x_0 ; y_0) = ax_0 + by_0.$$

• Khi tìm giá trị lớn nhất của $P(x ; y)$, ta cho đường thẳng (d_m) với hệ số góc $-\frac{a}{b}$ chuyển động song song với chính nó từ một vị trí nào đó ở phía trên miền (S) và đi xuống cho đến khi (d_m) lần đầu tiên đi qua một điểm $(x_0 ; y_0)$ nào đó của (S). Khi đó, m đạt giá trị lớn nhất và tương ứng với nó là giá trị lớn nhất của $P(x ; y)$. Đó là

$$P(x_0 ; y_0) = ax_0 + by_0.$$

CHÚ Ý

Qua cách làm trên, ta thấy rằng $P(x ; y)$ đạt giá trị nhỏ nhất (hay lớn nhất) tại một đỉnh nào đó của đa giác (S).

Áp dụng cách làm trên vào bài toán 2 nêu trong §5, ta thấy khi (d_m) đi qua đỉnh $A(5 ; 4)$ thì m nhỏ nhất. Điều đó có nghĩa là $T(x ; y)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = 5$ và $y = 4$. Khi đó, $T(5 ; 4) = 32$.

Luyện tập

45. Xác định miền nghiệm của các bất phương trình hai ẩn :

a) $x + 3 + 2(2y + 5) < 2(1 - x)$; b) $(1+\sqrt{3})x-(1-\sqrt{3})y \geq 2$.

46. Xác định miền nghiệm của các hệ bất phương trình hai ẩn :

a) $\begin{cases} x-y>0 \\ x-3y \leq -3 \\ x+y>5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x-2y-6 \geq 0 \\ 2(x-1)+\dfrac{3y}{2} \leq 4 \\ x \geq 0. \end{cases}$

47. Gọi (S) là tập hợp các điểm trong mặt phẳng toạ độ có toạ độ thoả mãn hệ

$$\begin{cases} 2x-y \geq 2 \\ x-2y \leq 2 \\ x+y \leq 5 \\ x \geq 0. \end{cases}$$

a) Hãy xác định (S) để thấy rằng đó là một miền tam giác.

b) Trong (S), hãy tìm điểm có toạ độ $(x\,;y)$ làm cho biểu thức $f(x\,;y) = y - x$ có giá trị nhỏ nhất, biết rằng $f(x\,;y)$ có giá trị nhỏ nhất tại một trong các đỉnh của (S).

48. *Bài toán vitamin*

Một nhà khoa học nghiên cứu về tác động phối hợp của vitamin A và vitamin B đối với cơ thể con người. Kết quả như sau :

i) Một người có thể tiếp nhận được mỗi ngày không quá 600 đơn vị vitamin A và không quá 500 đơn vị vitamin B.

ii) Một người mỗi ngày cần từ 400 đến 1000 đơn vị vitamin cả A lẫn B.

iii) Do tác động phối hợp của hai loại vitamin, mỗi ngày, số đơn vị vitamin B không ít hơn $\frac{1}{2}$ số đơn vị vitamin A nhưng không nhiều hơn ba lần số đơn vị vitamin A.

Giả sử x và y lần lượt là số đơn vị vitamin A và B mà bạn dùng mỗi ngày.

a) Gọi c (đồng) là số tiền vitamin mà bạn phải trả mỗi ngày. Hãy viết phương trình biểu diễn c dưới dạng một biểu thức của x và y, nếu giá một đơn vị vitamin A là 9 đồng và giá một đơn vị vitamin B là 7,5 đồng.

b) Viết các bất phương trình biểu thị các điều kiện i), ii), và iii) thành một hệ bất phương trình rồi xác định miền nghiệm (S) của hệ bất phương trình đó.

c) Tìm phương án dùng hai loại vitamin A và B thoả mãn các điều kiện trên để số tiền phải trả là ít nhất, biết rằng c đạt giá trị nhỏ nhất tại một trong các đỉnh của miền nghiệm (S).

Em có biết

VÀI NÉT VỀ LỊCH SỬ QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

Từ thời cổ đại, khi thực hiện các công việc của mình, loài người đã luôn hướng tới cách làm tốt nhất trong các cách làm có thể được (tìm phương án tối ưu trong các phương án). Khi toán học phát triển, người ta đã mô hình hoá toán học các việc cần làm, nghĩa là biểu thị các mục tiêu cần đạt được, các yêu cầu hay các điều kiện cần thoả mãn bằng ngôn ngữ toán học để tìm lời giải tối ưu cho nó. Từ đó, hình thành nên các bài toán tối ưu.

Quy hoạch tuyến tính là lĩnh vực toán học nghiên cứu các bài toán tối ưu với hữu hạn biến (ẩn), trong đó, mục tiêu và các điều kiện ràng buộc được biểu thị bằng các hàm số, các phương trình hay bất phương trình tuyến tính (bậc nhất).

Kup-man, Đan-dich và Kan-to-rô-vich ở Lúc-xăm-bua năm 1976.

Có thể nói, người đầu tiên quan tâm đến *Quy hoạch tuyến tính* là L. V. Kan-to-rô-vich (Leonid Vitalyevich Kantorovich, 1912 – 1986). Trong cuốn "Các phương pháp toán học trong tổ chức và kế hoạch hoá sản xuất" (NXB Đại học Quốc gia Lê-nin-grát, 1939), ông đã nêu bật vai trò của một lớp bài toán *Quy hoạch tuyến tính* và đề xuất thuật toán sơ bộ để giải chúng. Tuy nhiên, Quy hoạch tuyến tính chỉ được nhiều người biết đến vào năm 1947, khi G.B. Đan-dich (George Bernard Dantzig, 1914 – 2005) công bố thuật toán đơn hình để giải các bài toán *Quy hoạch tuyến tính*. Cũng năm đó, T. C. Kup-man (Tjalling Charles Koopmans, 1910 – 1985) đã chỉ ra rằng *Quy hoạch tuyến tính* là công cụ tuyệt vời để phân tích lí thuyết kinh tế cổ điển.

Năm 1975, Kan-to-rô-vich và Kup-man đã được Viện Hàn lâm Hoàng gia Thuỵ Điển trao giải thưởng Nô-ben về khoa học kinh tế.

Ngày nay, trong thời đại máy tính điện tử, *Quy hoạch tuyến tính* vẫn được tiếp tục nghiên cứu nhằm tìm ra các thuật toán tốt hơn.