

§ 3 BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Trước đây, chúng ta đã làm quen với *bất phương trình bậc nhất một ẩn*. Đó là bất phương trình có một trong các dạng $ax + b < 0$, $ax + b \leq 0$, $ax + b > 0$, $ax + b \geq 0$, trong đó a và b là hai số cho trước với $a \neq 0$, x là ẩn.

H1 Cho bất phương trình $mx \leq m(m + 1)$.

a) Giải bất phương trình với $m = 2$.

b) Giải bất phương trình với $m = -\sqrt{2}$.

Như vậy, nếu a và b là những biểu thức chứa tham số thì tập nghiệm của bất phương trình phụ thuộc vào tham số đó. Việc tìm tập nghiệm của một bất phương trình tùy theo các giá trị của tham số gọi là *giải và biện luận* bất phương trình đó.

Dưới đây, chúng ta chủ yếu nói về cách giải và biện luận bất phương trình dạng $ax + b < 0$. Đối với các bất phương trình dạng còn lại, cách giải cũng tương tự.

1. Giải và biện luận bất phương trình dạng $ax + b < 0$

Kết quả giải và biện luận bất phương trình

$$ax + b < 0 \tag{1}$$

được nêu trong bảng sau đây.

- | |
|--|
| <p>1) Nếu $a > 0$ thì $(1) \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$. Vậy tập nghiệm của (1) là $S = \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$.</p> <p>2) Nếu $a < 0$ thì $(1) \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$. Vậy tập nghiệm của (1) là $S = \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$.</p> <p>3) Nếu $a = 0$ thì $(1) \Leftrightarrow 0x < -b$. Do đó :</p> <ul style="list-style-type: none">- Bất phương trình (1) vô nghiệm ($S = \emptyset$) nếu $b \geq 0$;- Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi x ($S = \mathbb{R}$) nếu $b < 0$. |
|--|

CHÚ Ý

Việc biểu diễn các tập nghiệm trên trục số sẽ rất có ích sau này.

Chẳng hạn, phần không bị gạch ở trên hình 4.2 biểu diễn tập nghiệm của (1) với $a > 0$.



Hình 4.2

Ví dụ 1. Giải và biện luận bất phương trình

$$mx + 1 > x + m^2. \quad (2)$$

Giải. Bất phương trình (2) tương đương với

$$(m - 1)x > m^2 - 1. \quad (3)$$

Ta có

1) Nếu $m > 1$ thì $m - 1 > 0$ nên (3) $\Leftrightarrow x > \frac{m^2 - 1}{m - 1} \Leftrightarrow x > m + 1$.

2) Nếu $m < 1$ thì $m - 1 < 0$ nên (3) $\Leftrightarrow x < \frac{m^2 - 1}{m - 1} \Leftrightarrow x < m + 1$.

3) Nếu $m = 1$ thì bất phương trình trở thành $0x > 0$ nên nó vô nghiệm.

Kết luận : – Nếu $m > 1$ thì tập nghiệm của (2) là $S = (m + 1 ; +\infty)$.

– Nếu $m < 1$ thì tập nghiệm của (2) là $S = (-\infty ; m + 1)$.

– Nếu $m = 1$ thì tập nghiệm của (2) là $S = \emptyset$. □

H2 Từ kết quả trên, hãy suy ra tập nghiệm của bất phương trình

$$mx + 1 \geq x + m^2.$$

Ví dụ 2. Giải và biện luận bất phương trình

$$2mx \geq x + 4m - 3. \quad (4)$$

Giải. Bất phương trình (4) tương đương với

$$(2m - 1)x \geq 4m - 3. \quad (5)$$

1) Nếu $m > \frac{1}{2}$ thì $2m - 1 > 0$ nên (5) $\Leftrightarrow x \geq \frac{4m-3}{2m-1}$.

2) Nếu $m < \frac{1}{2}$ thì $2m - 1 < 0$ nên (5) $\Leftrightarrow x \leq \frac{4m-3}{2m-1}$.

3) Nếu $m = \frac{1}{2}$ thì (5) trở thành $0x \geq -1$, bởi vậy nó nghiệm đúng với mọi x .

Kết luận : - Nếu $m > \frac{1}{2}$ thì tập nghiệm của (4) là $S = \left[\frac{4m-3}{2m-1}; +\infty \right)$.

- Nếu $m < \frac{1}{2}$ thì tập nghiệm của (4) là $S = \left(-\infty; \frac{4m-3}{2m-1} \right]$.

- Nếu $m = \frac{1}{2}$ thì tập nghiệm của (4) là $S = \mathbb{R}$. □

2. Giải hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn

Tương tự như hệ phương trình, tập nghiệm của một hệ bất phương trình là giao của tất cả các tập nghiệm của các bất phương trình trong hệ.

Do đó,

Muốn giải hệ bất phương trình một ẩn, ta giải từng bất phương trình của hệ rồi lấy giao của các tập nghiệm thu được.

Ví dụ 3. Giải hệ bất phương trình

$$(I) \quad \begin{cases} 3x - 5 \leq 0 & (6) \\ 2x + 3 \geq 0 & (7) \\ x + 1 > 0. & (8) \end{cases}$$

Giải. Giải lần lượt từng bất phương trình của hệ, ta được :

Tập nghiệm của (6) là $S_1 = \left(-\infty; \frac{5}{3} \right]$;

Tập nghiệm của (7) là $S_2 = \left[-\frac{3}{2}; +\infty \right)$;

Tập nghiệm của (8) là $S_3 = (-1; +\infty)$.

Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là

$$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \left(-1; \frac{5}{3}\right]. \quad \square$$

Ta cũng có thể trình bày lời giải ví dụ 3 như sau :

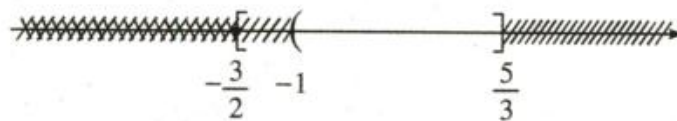
$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{5}{3} \\ x \geq -\frac{3}{2} \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x \leq \frac{5}{3}.$$

Tập nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là

$$S = \left(-1; \frac{5}{3}\right]. \quad \square$$

CHÚ Ý

Để dễ xác định tập nghiệm S , ta biểu diễn các tập nghiệm trên trục số bằng cách gạch đi các điểm (phần) không thuộc tập nghiệm của từng bất phương trình trong hệ, phần còn lại sẽ biểu diễn tập nghiệm cần tìm (h.4.3).



Hình 4.3

H3 Tìm các giá trị của x để đồng thời xảy ra hai đẳng thức :

$$|3x + 2| = 3x + 2 \text{ và } |2x - 5| = 5 - 2x.$$

Hướng dẫn. $|A| = A \Leftrightarrow A \geq 0$ và $|B| = -B \Leftrightarrow B \leq 0$.

Ví dụ 4. Với giá trị nào của m thì hệ bất phương trình sau có nghiệm ?

$$\begin{cases} x + m \leq 0 & (9) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + 3 < 0. & (10) \end{cases}$$

Giải. Ta có (9) $\Leftrightarrow x \leq -m$. Tập nghiệm của (9) là $(-\infty; -m]$.

(10) $\Leftrightarrow x > 3$. Tập nghiệm của (10) là $(3; +\infty)$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = (-\infty; -m] \cap (3; +\infty)$. Hệ có nghiệm khi và chỉ khi $S \neq \emptyset$, tức là $3 < -m$ hay $m < -3$. \square

Câu hỏi và bài tập

25. Giải các bất phương trình :

a) $\frac{x+2}{3} - x + 1 > x + 3$;

b) $\frac{3x+5}{2} - 1 \leq \frac{x+2}{3} + x$;

c) $(1 - \sqrt{2})x < 3 - 2\sqrt{2}$;

d) $(x + \sqrt{3})^2 \geq (x - \sqrt{3})^2 + 2$.

26. Giải và biện luận các bất phương trình :

a) $m(x - m) \leq x - 1$;

b) $mx + 6 > 2x + 3m$;

c) $(x + 1)k + x < 3x + 4$;

d) $(a + 1)x + a + 3 \geq 4x + 1$.

27. Giải các hệ bất phương trình :

a)
$$\begin{cases} 5x - 2 > 4x + 5 \\ 5x - 4 < x + 2 ; \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x + 1 > 3x + 4 \\ 5x + 3 \geq 8x - 9. \end{cases}$$

Luyện tập

28. Giải và biện luận các bất phương trình :

a) $m(x - m) > 2(4 - x)$;

b) $3x + m^2 \geq m(x + 3)$;

c) $k(x - 1) + 4x \geq 5$;

d) $b(x - 1) \leq 2 - x$.

29. Giải các hệ bất phương trình :

a)
$$\begin{cases} \frac{5x+2}{3} \geq 4-x \\ \frac{6-5x}{13} < 3x+1 ; \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} (1-x)^2 > 5+3x+x^2 \\ (x+2)^3 < x^3+6x^2-7x-5 ; \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \frac{4x-5}{7} < x+3 \\ \frac{3x+8}{4} > 2x-5 ; \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x-1 \leq 2x-3 \\ 3x < x+5 \\ \frac{5-3x}{2} \leq x-3. \end{cases}$$

30. Tìm các giá trị của m để mỗi hệ bất phương trình sau có nghiệm :

a)
$$\begin{cases} 3x - 2 > -4x + 5 \\ 3x + m + 2 < 0 ; \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x - 2 \leq 0 \\ m + x > 1. \end{cases}$$

31. Tìm các giá trị của m để mỗi hệ bất phương trình sau vô nghiệm :

a)
$$\begin{cases} 2x + 7 < 8x - 1 \\ -2x + m + 5 \geq 0 ; \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} (x-3)^2 \geq x^2 + 7x + 1 \\ 2m - 5x \leq 8. \end{cases}$$