§ 2 ĐẠI CƯƠNG VỀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

1. Khái niệm bất phương trình một ẩn

ĐỊNH NGHĨA

Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có tập xác định lần lượt là $\mathcal{D}_f$ và $\mathcal{D}_g$. Đặt $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$.

*Mệnh đề chứa biến có một trong các dạng $f(x) < g(x)$, $f(x) > g(x)$, $f(x) \leq g(x)$, $f(x) \geq g(x)$ được gọi là **bất phương trình một ẩn** ; x gọi là **ẩn số** (hay **ẩn**) và $\mathcal{D}$ gọi là **tập xác định** của bất phương trình đó.*

*Số $x_0 \in \mathcal{D}$ gọi là một **nghiệm** của bất phương trình $f(x) < g(x)$ nếu $f(x_0) < g(x_0)$ là mệnh đề đúng.*

Khái niệm "nghiệm" cũng được định nghĩa tương tự cho các bất phương trình dạng

$$f(x) > g(x), f(x) \leq g(x) \text{ và } f(x) \geq g(x).$$

Giải một bất phương trình là tìm tất cả các nghiệm (hay tìm *tập nghiệm*) của bất phương trình đó.

CHÚ Ý

Trong thực hành, ta không cần viết rõ tập xác định $\mathcal{D}$ của bất phương trình mà chỉ cần nêu điều kiện để $x \in \mathcal{D}$. Điều kiện đó gọi là *điều kiện xác định của bất phương trình*, gọi tắt là ***điều kiện của bất phương trình***.

H1 *Biểu diễn tập nghiệm của mỗi bất phương trình sau bởi các kí hiệu khoảng hoặc đoạn :*

a) $-0,5x > 2$; *b)* $|x| \leq 1$.

Dưới đây, chúng ta chỉ nói tới bất phương trình dạng $f(x) < g(x)$. Đối với các bất phương trình dạng $f(x) > g(x)$, $f(x) \leq g(x)$ và $f(x) \geq g(x)$, ta cũng có các kết quả tương tự.

2. Bất phương trình tương đương

ĐỊNH NGHĨA

Hai bất phương trình (cùng ẩn) được gọi là ***tương đương*** *nếu chúng có cùng tập nghiệm.*

Nếu $f_1(x) < g_1(x)$ tương đương với $f_2(x) < g_2(x)$ thì ta viết

$$f_1(x) < g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) < g_2(x).$$

H2 *Các khẳng định sau đây đúng hay sai ? Vì sao ?*

a) $x + \sqrt{x-2} > \sqrt{x-2} \Leftrightarrow x > 0$;

b) $(\sqrt{x-1})^2 \leq 1 \Leftrightarrow x - 1 \leq 1$.

CHÚ Ý

Khi muốn nhấn mạnh hai bất phương trình có cùng tập xác định $\mathcal{D}$ (hay có cùng điều kiện xác định mà ta cũng kí hiệu là $\mathcal{D}$) và tương đương với nhau, ta nói :

– Hai bất phương trình tương đương trên $\mathcal{D}$, hoặc

– Với điều kiện $\mathcal{D}$, hai bất phương trình là tương đương với nhau.

Ví dụ 1. Với điều kiện $x > 2$, ta có $\dfrac{1}{x-2} > 1 \Leftrightarrow 1 > x - 2$. □

3. Biến đổi tương đương các bất phương trình

Cũng như với phương trình, ở đây chúng ta quan tâm đến các phép biến đổi không làm thay đổi tập nghiệm của bất phương trình. Ta gọi chúng là các phép ***biến đổi tương đương***. *Phép biến đổi tương đương biến một bất phương trình thành một bất phương trình tương đương với nó.* Chẳng hạn, việc thực hiện các phép biến đổi đồng nhất ở mỗi vế của một bất phương trình và giữ nguyên tập xác định của nó là một phép biến đổi tương đương.

Dưới đây là định lí về một số phép biến đổi tương đương thường dùng. Các hàm số nói trong định lí này đều được cho bởi biểu thức.

ĐỊNH LÍ

> *Cho bất phương trình $f(x) < g(x)$ có tập xác định $\mathcal{D}$, $y = h(x)$ là một hàm số xác định trên $\mathcal{D}$.*
>
> *Khi đó, trên $\mathcal{D}$, bất phương trình $f(x) < g(x)$ tương đương với mỗi bất phương trình :*
>
> 1) $f(x) + h(x) < g(x) + h(x)$;
>
> 2) $f(x)h(x) < g(x)h(x)$ *nếu* $h(x) > 0$ *với mọi* $x \in \mathcal{D}$;
>
> 3) $f(x)h(x) > g(x)h(x)$ *nếu* $h(x) < 0$ *với mọi* $x \in \mathcal{D}$.

Chứng minh. Sau đây, ta chỉ chứng minh kết luận 3). Các kết luận khác cũng được chứng minh tương tự.

Nếu x_0 thuộc $\mathcal{D}$ thì $f(x_0)$, $g(x_0)$ và $h(x_0)$ là các giá trị xác định bằng số, hơn nữa, vì $h(x)$ luôn âm nên $h(x_0) < 0$. Do đó, áp dụng tính chất của bất đẳng thức số, ta có

$$f(x_0) < g(x_0) \Leftrightarrow f(x_0)h(x_0) > g(x_0)h(x_0).$$

Từ đó suy ra rằng hai bất phương trình có cùng tập nghiệm, nghĩa là chúng tương đương với nhau. □

Ví dụ 2

a) Bất phương trình $\sqrt{x} > -2$ tương đương với bất phương trình

$$\sqrt{x} - \sqrt{x} > -2 - \sqrt{x}.$$

b) Bất phương trình $x > -2$ không tương đương với bất phương trình

$$x - \sqrt{x} > -2 - \sqrt{x}.$$ □

H3 *Chứng minh các khẳng định trong ví dụ 2.*

H4 *Các khẳng định sau đây đúng hay sai ? Vì sao ?*

a) $x + \frac{1}{x} < 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x < 1$; b) $\frac{x(x-1)}{x-1} \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 2$.

HỆ QUẢ

Cho bất phương trình $f(x) < g(x)$ có tập xác định $\mathcal{D}$.

1) Quy tắc nâng lên luỹ thừa bậc ba

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow [f(x)]^3 < [g(x)]^3.$$

2) Quy tắc nâng lên luỹ thừa bậc hai

Nếu $f(x)$ và $g(x)$ không âm với mọi x thuộc $\mathcal{D}$ thì

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow [f(x)]^2 < [g(x)]^2.$$

Tương tự, ta cũng có quy tắc nâng lên luỹ thừa bậc lẻ và nâng lên luỹ thừa bậc chẵn.

H5 *Giải bất phương trình sau đây (bằng cách bình phương hai vế), giải thích rõ các phép biến đổi tương đương đã thực hiện :*

$$|x+1| \leq |x|.$$

Câu hỏi và bài tập

21. Một bạn lập luận như sau : Do hai vế của bất phương trình $\sqrt{x-1} < |x|$ luôn không âm nên bình phương hai vế, ta được bất phương trình tương đương $x - 1 < x^2$. Theo em, lập luận trên có đúng không ? Vì sao ?

22. Tìm điều kiện xác định rồi suy ra tập nghiệm của mỗi bất phương trình sau :

a) $\sqrt{x} > \sqrt{-x}$;

b) $\sqrt{x-3} < 1 + \sqrt{x-3}$;

c) $x + \dfrac{1}{x-3} \geq 2 + \dfrac{1}{x-3}$;

d) $\dfrac{x}{\sqrt{x-2}} < \dfrac{2}{\sqrt{x-2}}$.

23. Trong hai bất phương trình sau đây, bất phương trình nào tương đương với bất phương trình $2x - 1 \geq 0$:

$$2x - 1 + \frac{1}{x-3} \geq \frac{1}{x-3} \quad \text{và} \quad 2x - 1 - \frac{1}{x+3} \geq -\frac{1}{x+3}.$$

24. Trong bốn cặp bất phương trình sau đây, hãy chọn ra các cặp bất phương trình tương đương (nếu có) :

a) $x - 2 > 0$ và $x^2(x-2) < 0$;

b) $x - 2 < 0$ và $x^2(x-2) > 0$;

c) $x - 2 \leq 0$ và $x^2(x-2) \leq 0$;

d) $x - 2 \geq 0$ và $x^2(x-2) \geq 0$.