§ 4 DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT

1. Nhị thức bậc nhất và dấu của nó

Nhiều bài toán dẫn đến việc xét xem một biểu thức $f(x)$ đã cho nhận giá trị âm (hoặc dương) với những giá trị nào của x. Ta gọi việc làm đó là *xét dấu của biểu thức* $f(x)$. Dưới đây, ta sẽ tìm hiểu về nhị thức bậc nhất và dấu của nó.

a) Nhị thức bậc nhất

ĐỊNH NGHĨA

> ***Nhị thức bậc nhất*** *(đối với x) là biểu thức dạng* $ax + b$, *trong đó* a *và* b *là hai số cho trước với* $a \neq 0$.

Ta đã biết, phương trình $ax + b = 0$ $(a \neq 0)$ có một nghiệm duy nhất $x_0 = -\dfrac{b}{a}$.

Nghiệm đó cũng được gọi là *nghiệm của nhị thức bậc nhất* $f(x) = ax + b$. Nó có vai trò rất quan trọng trong việc xét dấu của nhị thức bậc nhất $f(x)$.

b) Dấu của nhị thức bậc nhất

Đặt $x_0 = -\dfrac{b}{a}$, ta viết nhị thức bậc nhất $f(x) = ax + b$ như sau

$$f(x) = ax + b = a\left(x + \frac{b}{a}\right) = a(x - x_0).$$

Khi $x > x_0$ thì $x - x_0 > 0$ nên dấu của $a(x - x_0)$ trùng với dấu của a.

Khi $x < x_0$ thì $x - x_0 < 0$ nên dấu của $a(x - x_0)$ trái với dấu của a.

Từ đó ta có

ĐỊNH LÍ (về dấu của nhị thức bậc nhất)

Nhị thức bậc nhất $f(x) = ax + b$ cùng dấu với hệ số a khi x lớn hơn nghiệm và trái dấu với hệ số a khi x nhỏ hơn nghiệm của nó.

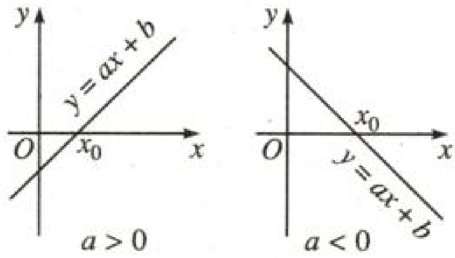
Kết quả của định lí này được tóm tắt trong bảng sau

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x) = ax + b$		trái dấu với a	0	cùng dấu với a	

Chẳng hạn nhị thức $f(x) = -x + 1{,}5$ có hệ số $a = -1$ và nghiệm $x_0 = 1{,}5$. Do đó, dấu của nó được cho trong bảng sau

x	$-\infty$		$1{,}5$		$+\infty$
$-x + 1{,}5$		$+$	0	$-$	

Nhị thức đã cho dương khi $x < 1{,}5$ và âm khi $x > 1{,}5$.



Hình 4.4

H1 *Hãy giải thích bằng đồ thị (h.4.4) các kết quả của định lí trên.*

2. Một số ứng dụng

a) Giải bất phương trình tích

Ta xét các bất phương trình có thể đưa về một trong các dạng $P(x) > 0$, $P(x) \geq 0$, $P(x) \leq 0$, $P(x) < 0$ với $P(x)$ là tích của những nhị thức bậc nhất.

Ví dụ 1. Giải bất phương trình

$$(x - 3)(x + 1)(2 - 3x) > 0. \qquad (1)$$

Cách giải. Để giải bất phương trình (1), ta lập bảng xét dấu vế trái của (1).

Đặt $P(x) = (x - 3)(x + 1)(2 - 3x)$.

– Giải phương trình $P(x) = 0$, ta được

$(x - 3)(x + 1)(2 - 3x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ hoặc $x = -1$ hoặc $x = \frac{2}{3}$.

– Sắp xếp các giá trị tìm được của x theo thứ tự tăng : -1, $\frac{2}{3}$, 3. Ba số này chia trục số thành bốn khoảng. Ta xác định dấu của $P(x)$ trên từng khoảng bằng cách lập bảng sau đây gọi là *bảng xét dấu của* $P(x)$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{2}{3}$		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$2-3x$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Trong bảng xét dấu, hàng trên cùng ghi lại bốn khoảng được xét của trục số, ba hàng tiếp theo ghi dấu của các nhân tử bậc nhất trên mỗi khoảng (dựa vào định lí về dấu của nhị thức bậc nhất) ; hàng cuối ghi dấu của $P(x)$ trên mỗi khoảng bằng cách lấy "tích" của các dấu cùng cột ở ba hàng trên.

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình (1) là

$$S = (-\infty\,;-1) \cup \left(\frac{2}{3}\,;3\right). \qquad \square$$

b) Giải bất phương trình chứa ẩn ở mẫu

Ở đây, ta chỉ xét các bất phương trình có thể đưa về một trong các dạng $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)} \le 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)} \ge 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$, trong đó $P(x)$ và $Q(x)$ là tích của những nhị thức bậc nhất. Để giải các bất phương trình như vậy, ta lập bảng xét dấu của phân thức $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Khi lập bảng xét dấu, nhớ rằng phải ghi tất cả các nghiệm của hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ lên trục số. Trong hàng cuối, tại những điểm mà $Q(x) = 0$, ta dùng kí hiệu $\|$ để chỉ tại đó bất phương trình đã cho không xác định.

Ví dụ 2. Giải bất phương trình

$$\frac{3}{x-2} \le \frac{5}{2x-1}. \qquad (2)$$

Giải. Ta có

$$(2) \quad \Leftrightarrow \frac{3}{x-2} - \frac{5}{2x-1} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(2x-1) - 5(x-2)}{(x-2)(2x-1)} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+7}{(x-2)(2x-1)} \le 0. \quad (3)$$

Bảng xét dấu vế trái của (3) :

x	$-\infty$		-7		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$x+7$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$2x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
Vế trái		$-$	0	$+$	||	$-$	||	$+$	

Từ đó suy ra tập nghiệm của (2) là $S = (-\infty\,;\,-7] \cup \left(\frac{1}{2}\,;\,2\right)$. □

c) Giải phương trình, bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối

Một trong những cách giải phương trình hay bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối là sử dụng định nghĩa để khử dấu giá trị tuyệt đối. Ta thường phải xét phương trình hay bất phương trình trong nhiều khoảng (đoạn, nửa khoảng) khác nhau, trên đó mỗi biểu thức nằm trong dấu giá trị tuyệt đối đều có một dấu xác định. Sau đây là một ví dụ đơn giản.

Ví dụ 3. Giải bất phương trình

$$|2x-1| < 3x+5. \quad (4)$$

Giải

1) Với $x < \frac{1}{2}$, ta có

$$(4) \Leftrightarrow 1 - 2x < 3x + 5 \Leftrightarrow 5x > -4 \Leftrightarrow x > -\frac{4}{5}.$$

Kết hợp với điều kiện $x < \frac{1}{2}$, ta được $-\frac{4}{5} < x < \frac{1}{2}$. Vậy tập các nghiệm thoả mãn điều kiện đang xét là khoảng $\left(-\frac{4}{5}\,;\,\frac{1}{2}\right)$.

2) Với $x \geq \frac{1}{2}$, ta có

$$(4) \Leftrightarrow 2x - 1 < 3x + 5 \Leftrightarrow x > -6.$$

Kết hợp với điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$, ta được $x \geq \frac{1}{2}$. Vậy tập các nghiệm thoả mãn điều kiện đang xét là nửa khoảng $\left[\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right)$.

Tóm lại, tập nghiệm của bất phương trình (4) là

$$S = \left(-\frac{4}{5}\,;\,\frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right) = \left(-\frac{4}{5}\,;\,+\infty\right). \qquad \square$$

Câu hỏi và bài tập

32. Lập bảng xét dấu của các biểu thức :

a) $\dfrac{4-3x}{2x+1}$; b) $1 - \dfrac{2-x}{3x-2}$;

c) $x(x-2)^2(3-x)$; d) $\dfrac{x(x-3)^2}{(x-5)(1-x)}$.

33. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử bậc nhất rồi xét dấu :

a) $-x^2 + x + 6$; b) $2x^2 - (2+\sqrt{3})x + \sqrt{3}$.

34. Giải các bất phương trình :

a) $\dfrac{(3-x)(x-2)}{x+1} \leq 0$; b) $\dfrac{3}{1-x} \geq \dfrac{5}{2x+1}$;

c) $\left|2x - \sqrt{2}\right| + \left|\sqrt{2} - x\right| > 3x - 2$; d) $\left|(\sqrt{2} - \sqrt{3})x + 1\right| \leq \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

35. Giải các hệ bất phương trình :

a) $\begin{cases} (x-3)(\sqrt{2} - x) > 0 \\ \dfrac{4x-3}{2} < x + 3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \dfrac{2}{2x-1} \leq \dfrac{1}{3-x} \\ |x| < 1. \end{cases}$

Luyện tập

36. Giải và biện luận các bất phương trình :

a) $mx + 4 > 2x + m^2$;

b) $2mx + 1 \geq x + 4m^2$;

c) $x(m^2 - 1) < m^4 - 1$;

d) $2(m + 1)x \leq (m + 1)^2 (x - 1)$.

37. Giải các bất phương trình :

a) $(-\sqrt{3}x + 2)(x + 1)(4x - 5) > 0$;

b) $\dfrac{3 - 2x}{(3x - 1)(x - 4)} < 0$;

c) $\dfrac{-3x + 1}{2x + 1} \leq -2$;

d) $\dfrac{x + 2}{3x + 1} \leq \dfrac{x - 2}{2x - 1}$.

38. Giải và biện luận các bất phương trình :

a) $(2x - \sqrt{2})(x - m) > 0$;

b) $\dfrac{\sqrt{3} - x}{x - 2m + 1} \leq 0$.

39. Tìm nghiệm nguyên của mỗi hệ bất phương trình sau :

a) $\begin{cases} 6x + \dfrac{5}{7} > 4x + 7 \\ \dfrac{8x + 3}{2} < 2x + 25 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 15x - 2 > 2x + \dfrac{1}{3} \\ 2(x - 4) < \dfrac{3x - 14}{2} \end{cases}$.

40. Giải các phương trình và bất phương trình :

a) $|x + 1| + |x - 1| = 4$;

b) $\dfrac{|2x - 1|}{(x + 1)(x - 2)} > \dfrac{1}{2}$.

41. Giải và biện luận các hệ bất phương trình :

a) $\begin{cases} (x - \sqrt{5})(\sqrt{7} - 2x) > 0 \\ x - m \leq 0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \dfrac{2}{x - 1} < \dfrac{5}{2x - 1} \\ x - m \geq 0. \end{cases}$