

§ 6

DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

1. Tam thức bậc hai

ĐỊNH NGHĨA

|| **Tam thức bậc hai** (đối với x) là biểu thức dạng $ax^2 + bx + c$,
trong đó a, b, c là những số cho trước với $a \neq 0$.

Theo định nghĩa trên, các biểu thức

$$f(x) = -\sqrt{2}x^2 + 3x + 1, g(x) = x^2 - 5 \text{ và } h(x) = \frac{1}{2}x^2$$

là những tam thức bậc hai.

Nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ cũng được gọi là *nghiệm của tam thức bậc hai* $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Các biểu thức $\Delta = b^2 - 4ac$ và $\Delta' = b^2 - ac$ với $b = 2b'$ theo thứ tự cũng được gọi là *biệt thức và biệt thức thu gọn của tam thức bậc hai* $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Trong §4, ta đã xét dấu của nhị thức bậc nhất và áp dụng để giải một số bất phương trình. Trong bài này và các bài tiếp theo của chương, ta sẽ xét dấu của tam thức bậc hai và áp dụng nó để giải các bất phương trình và phương trình bậc hai cũng như một số phương trình và bất phương trình khác.

2. Dấu của tam thức bậc hai

Ta sẽ quan sát đồ thị của hàm số bậc hai để suy ra định lí về dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Dấu của $f(x)$ phụ thuộc vào dấu của biệt thức Δ và hệ số a .

Trong từng trường hợp, dấu của $f(x)$ được nêu trong các bảng sau :

1) $\Delta < 0$ (tam thức bậc hai vô nghiệm)

$a > 0$	$a < 0$	Kết luận
 $x \begin{array}{ c c c } \hline -\infty & & +\infty \\ \hline \end{array}$ $f(x) \begin{array}{ c c } \hline + & \\ \hline \end{array}$	 $x \begin{array}{ c c c } \hline -\infty & & +\infty \\ \hline \end{array}$ $f(x) \begin{array}{ c c } \hline - & \\ \hline \end{array}$	$x \begin{array}{ c c c c } \hline -\infty & & & +\infty \\ \hline \end{array}$ $f(x) \begin{array}{ c c c c } \hline \text{Cùng dấu với } a & & & \\ \hline \end{array}$ $(af(x) > 0 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}).$

2) $\Delta = 0$ (tam thức bậc hai có nghiệm kép $x_0 = -\frac{b}{2a}$)

$a > 0$	$a < 0$	Kết luận
 $x \begin{array}{ c c c c } \hline -\infty & x_0 & & +\infty \\ \hline \end{array}$ $f(x) \begin{array}{ c c c c } \hline + & 0 & + & \\ \hline \end{array}$	 $x \begin{array}{ c c c c } \hline -\infty & x_0 & & +\infty \\ \hline \end{array}$ $f(x) \begin{array}{ c c c c } \hline - & 0 & - & \\ \hline \end{array}$	$x \begin{array}{ c c c c c } \hline -\infty & & x_0 & & +\infty \\ \hline \end{array}$ $f(x) \begin{array}{ c c c c c } \hline \text{Cùng dấu} & & 0 & \text{Cùng} & \\ \hline \text{với } a & & & & \text{dấu} \\ \hline & & 0 & & \text{với } a \\ \hline \end{array}$ $(af(x) > 0 \text{ với mọi } x \neq x_0).$

3) $\Delta > 0$ (tam thức bậc hai có hai nghiệm x_1 và x_2 ($x_1 < x_2$))

$a > 0$	$a < 0$	Kết luận
 $x \begin{array}{ c c c c c } \hline -\infty & x_1 & x_2 & & +\infty \\ \hline \end{array}$ $f(x) \begin{array}{ c c c c c } \hline + & 0 & - & 0 & + \\ \hline \end{array}$	 $x \begin{array}{ c c c c c } \hline -\infty & x_1 & x_2 & & +\infty \\ \hline \end{array}$ $f(x) \begin{array}{ c c c c c } \hline - & 0 & + & 0 & - \\ \hline \end{array}$	$x \begin{array}{ c c c c c } \hline -\infty & x_1 & x_2 & & +\infty \\ \hline \end{array}$ $f(x) \begin{array}{ c c c c c } \hline \text{Cùng} & & \text{Khác} & & \text{Cùng} \\ \hline \text{dấu} & & \text{dấu} & & \text{dấu} \\ \hline a & 0 & a & 0 & a \\ \hline \end{array}$ $(af(x) < 0 \text{ với mọi } x \in (x_1 ; x_2), af(x) > 0 \text{ với mọi } x \in (-\infty ; x_1) \cup (x_2 ; +\infty)).$

Các kết quả trên được phát biểu trong định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ (về dấu của tam thức bậc hai)

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \neq -\frac{b}{2a}$.

Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm x_1 và x_2 ($x_1 < x_2$). Khi đó, $f(x)$ trái dấu với hệ số a với mọi x nằm trong khoảng $(x_1 ; x_2)$ (tức là với $x_1 < x < x_2$), và $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi x nằm ngoài đoạn $[x_1 ; x_2]$ (tức là với $x < x_1$ hoặc $x > x_2$).

CHÚ Ý

Cũng như khi giải phương trình bậc hai, khi xét dấu tam thức bậc hai, ta có thể dùng biệt thức thu gọn Δ' thay cho Δ và cũng được các kết quả tương tự.

Ví dụ 1. $f(x) = 2x^2 - x + 1 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ vì tam thức $f(x)$ có $\Delta = -7 < 0$ và $a = 2 > 0$. □

Ví dụ 2. Xét dấu của tam thức bậc hai $f(x) = 3x^2 - 8x + 2$.

Giải. Vì $a = 3 > 0$ và $f(x)$ có hai nghiệm $x_1 = \frac{4 - \sqrt{10}}{3}$, $x_2 = \frac{4 + \sqrt{10}}{3}$

(dễ thấy $x_1 < x_2$) nên $f(x) > 0$ (cùng dấu với a) khi $x \in (-\infty ; x_1) \cup (x_2 ; +\infty)$, và $f(x) < 0$ (trái dấu với a) khi $x \in (x_1 ; x_2)$. □

Cũng có thể ghi kết quả trên trong bảng xét dấu của $f(x)$ như sau :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f(x) = 3x^2 - 8x + 2$	+	0	-	0

H1 Xét dấu của các tam thức bậc hai sau :

- a) $f(x) = -2x^2 + 5x + 7$; b) $g(x) = -2x^2 + x\sqrt{5} - 7$; c) $h(x) = 9x^2 - 12x + 4$.

Nhận xét

Từ định lí về dấu của tam thức bậc hai, ta thấy chỉ có một trường hợp duy nhất trong đó dấu của tam thức không thay đổi (luôn âm hoặc luôn dương), đó là khi $\Delta < 0$. Lúc đó, dấu của tam thức trùng với dấu của hệ số a . Do đó, ta có

$$\boxed{\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c > 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \\ \forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c < 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0. \end{cases}\end{aligned}}$$

Ví dụ 3. Với những giá trị nào của m thì đa thức $f(x) = (2 - m)x^2 - 2x + 1$ luôn dương ?

Giải. Với $m = 2$ thì $f(x) = -2x + 1$ lấy cả những giá trị âm (chẳng hạn $f(1) = -1$). Do đó, giá trị $m = 2$ không thoả mãn điều kiện đòi hỏi.

Với $m \neq 2$, $f(x)$ là tam thức bậc hai với biệt thức thu gọn $\Delta' = m - 1$. Do đó

$$\forall x, f(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 - m > 0 \\ \Delta' = m - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < 1.$$

Vậy với $m < 1$ thì đa thức $f(x)$ luôn dương. □

H2 Với những giá trị nào của m , đa thức $f(x) = (m - 1)x^2 + (2m + 1)x + m + 1$ âm với mọi x thuộc \mathbb{R} ?

Câu hỏi và bài tập

49. Xét dấu các tam thức bậc hai sau :

- | | |
|--------------------------------------|--|
| a) $3x^2 - 2x + 1$; | b) $-x^2 + 4x - 1$; |
| c) $x^2 - \sqrt{3}x + \frac{3}{4}$; | d) $(1 - \sqrt{2})x^2 - 2x + 1 + \sqrt{2}$. |

50. Tìm các giá trị của m để mỗi biểu thức sau luôn dương :

- | | |
|-------------------------------------|---------------------------------------|
| a) $(m^2 + 2)x^2 - 2(m + 1)x + 1$; | b) $(m + 2)x^2 + 2(m + 2)x + m + 3$. |
|-------------------------------------|---------------------------------------|

51. Tìm các giá trị của m để mỗi biểu thức sau luôn âm :

a) $-x^2 + 2m\sqrt{2}x - 2m^2 - 1$; b) $(m-2)x^2 - 2(m-3)x + m - 1$.

52. Chứng minh định lí về dấu của tam thức bậc hai.

Hướng dẫn. Với các trường hợp $\Delta < 0$ và $\Delta = 0$, sử dụng hệ thức đã biết

$$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \text{ hay } af(x) = a^2 \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right].$$

Trường hợp $\Delta > 0$, sử dụng hệ thức đã biết

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \text{ hay } af(x) = a^2(x - x_1)(x - x_2),$$

trong đó x_1 và x_2 là hai nghiệm của tam thức bậc hai $f(x)$.