§ 4 SỐ GẦN ĐÚNG VÀ SAI SỐ

1. Số gần đúng

Trong nhiều trường hợp, ta không biết được giá trị đúng của đại lượng ta đang quan tâm mà chỉ biết giá trị gần đúng của nó. Cả hai kết quả đo chiều dài chiếc bàn ở hình bên chỉ là các giá trị gần đúng với chiều dài thực của chiếc bàn.

H1 *Theo Tổng cục Thống kê, dân số nước ta tại thời điểm ngày 1-4-2003 là 80 902,4 nghìn người, trong đó số nam là 39 755,4 nghìn người, số nữ là 41 147,0 nghìn người ; thành thị có 20 869,5 nghìn người và nông thôn có 60 032,9 nghìn người.*
Hỏi các số liệu nói trên là số đúng hay số gần đúng ?

2. Sai số tuyệt đối và sai số tương đối

a) Sai số tuyệt đối

*Giả sử $\overline{a}$ là giá trị đúng của một đại lượng và a là giá trị gần đúng của $\overline{a}$. Giá trị $|\overline{a} - a|$ phản ánh mức độ sai lệch giữa $\overline{a}$ và a. Ta gọi $|\overline{a} - a|$ là **sai số tuyệt đối** của số gần đúng a và kí hiệu là Δ_a, tức là*

$$\Delta_a = |\overline{a} - a|.$$

Trên thực tế, nhiều khi ta không biết $\overline{a}$ nên không thể tính được chính xác Δ_a. Tuy nhiên, ta có thể đánh giá được Δ_a không vượt quá một số dương d nào đó.

Ví dụ 1. Giả sử $\overline{a} = \sqrt{2}$ và một giá trị gần đúng của nó là $a = 1,41$. Ta có :
$(1,41)^2 = 1,9881 < 2 \Rightarrow 1,41 < \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} - 1,41 > 0$;
$(1,42)^2 = 2,0164 > 2 \Rightarrow 1,42 > \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} - 1,41 < 0,01$.
Do đó

$$\Delta_a = |\overline{a} - a| = |\sqrt{2} - 1,41| < 0,01.$$

Vậy sai số tuyệt đối của 1,41 không vượt quá 0,01. □

Nếu $\Delta_a \le d$ thì $a - d \le \overline{a} \le a + d$. Khi đó, ta quy ước viết

$$\overline{a} = a \pm d.$$

Như vậy, khi viết $\overline{a} = a \pm d$, ta hiểu số đúng $\overline{a}$ nằm trong đoạn $[a - d\,;\, a + d]$.

Bởi vậy, d càng nhỏ thì độ sai lệch của số gần đúng a so với số đúng $\overline{a}$ càng ít. Thành thử d được gọi là ***độ chính xác của số gần đúng***.

H2 *Kết quả đo chiều dài một cây cầu được ghi là 152 m ± 0,2 m. Điều đó có nghĩa như thế nào ?*

b) Sai số tương đối

Ví dụ 2. Kết quả đo chiều cao một ngôi nhà được ghi là 15,2 m ± 0,1 m.

Ta muốn so sánh độ chính xác của phép đo này với phép đo chiều dài cây cầu nói trong **H2**.

Thoạt nhìn, ta thấy dường như phép đo này có độ chính xác cao hơn phép đo xét trong **H2**. □

Để so sánh độ chính xác của hai phép đo đạc hay tính toán, người ta đưa ra khái niệm sai số tương đối.

> ***Sai số tương đối*** *của số gần đúng a*, kí hiệu là δ_a, *là tỉ số giữa sai số tuyệt đối và* $|a|$, *tức là*
>
> $$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}.$$

Nếu $\overline{a} = a \pm d$ thì $\Delta_a \le d$. Do đó $\delta_a \le \dfrac{d}{|a|}$.

Nếu $\dfrac{d}{|a|}$ càng nhỏ thì chất lượng của phép đo đạc hay tính toán càng cao.

Người ta thường viết sai số tương đối dưới dạng phần trăm.

• Trở lại ví dụ 2 ở trên, ta thấy : Trong phép đo chiều dài cây cầu thì sai số tương đối không vượt quá $\dfrac{0,2}{152} \approx 0,13\%$. Trong phép đo chiều cao ngôi nhà thì sai số tương đối không vượt quá $\dfrac{0,1}{15,2} \approx 0,66\%$.

Như vậy, phép đo chiều dài cây cầu có độ chính xác cao hơn. □

H3 *Số $\overline{a}$ được cho bởi giá trị gần đúng $a = 5,7824$ với sai số tương đối không vượt quá 0,5%. Hãy đánh giá sai số tuyệt đối của $\overline{a}$.*

3. Số quy tròn

Trong thực tế đo đạc và tính toán, nhiều khi người ta chỉ cần biết giá trị gần đúng của một đại lượng với độ chính xác nào đó (kể cả khi có thể biết được giá trị đúng của nó). Khi đó để cho gọn, các số thường được *quy tròn*.

Tuỳ mức độ cho phép, ta có thể quy tròn một số đến hàng đơn vị, hàng chục, hàng trăm, ... hay đến hàng phần chục, hàng phần trăm, hàng phần nghìn, ... (gọi là hàng quy tròn) theo nguyên tắc sau :

• Nếu chữ số ngay sau hàng quy tròn nhỏ hơn 5 thì ta chỉ việc thay thế chữ số đó và các chữ số bên phải nó bởi 0.

• Nếu chữ số ngay sau hàng quy tròn lớn hơn hay bằng 5 thì ta thay thế chữ số đó và các chữ số bên phải nó bởi 0 và cộng thêm một đơn vị vào chữ số ở hàng quy tròn.

Ví dụ 3. Nếu quy tròn số 7216,4 đến hàng chục thì chữ số ở hàng quy tròn là 1, chữ số ngay sau đó là 6 ; do 6 > 5 nên ta có số quy tròn là 7220. □

Ví dụ 4. Nếu quy tròn số 2,654 đến hàng phần trăm (tức là chữ số thứ hai sau dấu phẩy) thì chữ số ngay sau hàng quy tròn là 4 ; do 4 < 5 nên số quy tròn là 2,65. □

Ta thấy trong ví dụ 3 và ví dụ 4, sai số tuyệt đối lần lượt là

$$|7216{,}4 - 7220| = 3{,}6 < 5\ ;$$

$$|2{,}654 - 2{,}65| = 0{,}004 < 0{,}005.$$

Nhận xét. *Khi thay số đúng bởi số quy tròn đến một hàng nào đó thì sai số tuyệt đối của số quy tròn không vượt quá nửa đơn vị của hàng quy tròn. Như vậy, độ chính xác của số quy tròn bằng nửa đơn vị của hàng quy tròn.*

H4 *Quy tròn số 7216,4 đến hàng đơn vị, số 2,654 đến hàng phần chục rồi tính sai số tuyệt đối của số quy tròn.*

CHÚ Ý

1) Khi quy tròn số đúng $\overline{a}$ đến một hàng nào thì ta nói số gần đúng a nhận được là chính xác đến hàng đó. Chẳng hạn, số gần đúng của π chính xác đến hàng phần trăm là 3,14 ; số gần đúng của $\sqrt{2}$ chính xác đến hàng phần nghìn là 1,414.

2) Nếu kết quả cuối cùng của bài toán yêu cầu chính xác đến hàng $\frac{1}{10^n}$ thì trong quá trình tính toán, ở kết quả của các phép tính trung gian, ta cần lấy chính xác ít nhất đến hàng $\frac{1}{10^{n+1}}$.

3) Cho số gần đúng a với độ chính xác d (tức là $\overline{a} = a \pm d$). Khi được yêu cầu quy tròn số a mà không nói rõ quy tròn đến hàng nào thì ta quy tròn số a đến hàng thấp nhất mà d nhỏ hơn một đơn vị của hàng đó.

Chẳng hạn, cho $\overline{a} = 1{,}236 \pm 0{,}002$ và ta phải quy tròn số 1,236. Ta thấy $0{,}001 < 0{,}002 < 0{,}01$ nên hàng thấp nhất mà d nhỏ hơn một đơn vị của hàng đó là hàng phần trăm. Vậy ta phải quy tròn số 1,236 đến hàng phần trăm. Kết quả là $\overline{a} \approx 1{,}24$.

4. Chữ số chắc và cách viết chuẩn số gần đúng

a) Chữ số chắc

*Cho số gần đúng a của số $\overline{a}$ với độ chính xác d. Trong số a, một chữ số được gọi là **chữ số chắc** (hay **đáng tin**) nếu d không vượt quá nửa đơn vị của hàng có chữ số đó.*

Nhận xét. *Tất cả các chữ số đứng bên trái chữ số chắc đều là chữ số chắc. Tất cả các chữ số đứng bên phải chữ số không chắc đều là chữ số không chắc.*

Ví dụ 5. Trong một cuộc điều tra dân số, người ta báo cáo số dân của tỉnh A là

1 379 425 người ± 300 người.

Vì $\frac{100}{2} = 50 < 300 < 500 = \frac{1000}{2}$ nên chữ số hàng nghìn (chữ số 9) là chữ số chắc. Vậy các chữ số chắc là 1, 3, 7 và 9 □

b) Dạng chuẩn của số gần đúng

Trong cách viết $\overline{a} = a \pm d$, ta biết ngay độ chính xác d của số gần đúng a (tức là $a - d \le \overline{a} \le a + d$). Ngoài cách viết trên, người ta còn quy ước dạng viết chuẩn của số gần đúng và khi cho một số gần đúng dưới dạng chuẩn, ta cũng biết được độ chính xác của nó.

• Nếu số gần đúng là số thập phân không nguyên thì dạng chuẩn là dạng mà mọi chữ số của nó đều là chữ số chắc.

Ví dụ 6. Cho một giá trị gần đúng của $\sqrt{5}$ được viết dưới dạng chuẩn là 2,236 ($\sqrt{5} \approx 2{,}236$). Ở đây, hàng thấp nhất có chữ số chắc là hàng phần nghìn nên độ chính xác của nó là $\frac{1}{2}.10^{-3} = 0{,}0005$. Do đó, ta biết được :

$2{,}236 - 0{,}0005 \le \sqrt{5} \le 2{,}236 + 0{,}0005$.

• Nếu số gần đúng là số nguyên thì dạng chuẩn của nó là $A.10^k$, trong đó A là số nguyên, 10^k là hàng thấp nhất có chữ số chắc ($k \in \mathbb{N}$).

(Từ đó, mọi chữ số của A đều là chữ số chắc).

Ví dụ 7. Số dân của Việt Nam (năm 2005) vào khoảng 83.10^6 người (83 triệu người). Ở đây, $k = 6$ nên độ chính xác của số gần đúng này là $\frac{1}{2}.10^6 = 500000$. Do đó, ta biết được số dân của Việt Nam trong khoảng từ 82,5 triệu người đến 83,5 triệu người.

CHÚ Ý

Các số gần đúng trong "Bảng số với bốn chữ số thập phân" (bảng Bra-đi-xơ) hoặc máy tính bỏ túi đều được cho dưới dạng chuẩn.

Ví dụ 8. Dùng máy tính bỏ túi để tính $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, ta được kết quả là 3,146 264 37. Ta hiểu số gần đúng này được viết dưới dạng chuẩn, nó có độ chính xác là $\frac{1}{2}.10^{-8}$.

(Đối với một số loại máy tính như *CASIO fx – 500 MS*, ta có thể sử dụng chức năng định trước độ chính xác của kết quả đã được cài sẵn trong máy).

CHÚ Ý

Với quy ước về dạng chuẩn số gần đúng thì hai số gần đúng 0,14 và 0,140 viết dưới dạng chuẩn có ý nghĩa khác nhau. Số gần đúng 0,14 có sai số tuyệt đối không vượt quá 0,005 còn số gần đúng 0,140 có sai số tuyệt đối không vượt quá 0,0005.

5. Kí hiệu khoa học của một số

Mỗi số thập phân khác 0 đều viết được dưới dạng $\alpha.10^n$, trong đó $1 \le |\alpha| < 10$, $n \in \mathbb{Z}$.

(Quy ước rằng nếu $n = -m$, với m là số nguyên dương thì $10^{-m} = \frac{1}{10^m}$).

Dạng như thế được gọi là ***kí hiệu khoa học*** của số đó. Người ta thường dùng kí hiệu khoa học để ghi những số rất lớn hoặc rất bé. Số mũ n của 10 trong kí hiệu khoa học của một số cho ta thấy độ lớn (bé) của số đó.

Ví dụ 9. Khối lượng của Trái Đất viết dưới dạng kí hiệu khoa học là

$$5{,}98.10^{24} \text{ kg}.$$

Khối lượng nguyên tử của Hiđrô viết dưới dạng kí hiệu khoa học là

$$1{,}66.10^{-24} \text{ g}.$$ □

Câu hỏi và bài tập

43. Các nhà toán học cổ đại Trung Quốc đã dùng phân số $\frac{22}{7}$ để xấp xỉ số π. Hãy đánh giá sai số tuyệt đối của giá trị gần đúng này, biết $3{,}1415 < \pi < 3{,}1416$.

44. Một tam giác có ba cạnh đo được như sau : $a = 6{,}3$ cm $\pm$ 0,1 cm ; $b = 10$ cm $\pm$ 0,2 cm và $c = 15$ cm $\pm$ 0,2 cm. Chứng minh rằng chu vi P của tam giác là $P = 31{,}3$ cm $\pm$ 0,5 cm.

45. Một cái sân hình chữ nhật với chiều rộng là $x = 2{,}56$ m $\pm$ 0,01 m và chiều dài là $y = 4{,}2$ m $\pm$ 0,01 m.

Chứng minh rằng chu vi P của sân là $P = 13{,}52$ m $\pm$ 0,04 m.

46. Sử dụng máy tính bỏ túi :

a) Hãy viết giá trị gần đúng của $\sqrt[3]{2}$ chính xác đến hàng phần trăm và hàng phần nghìn.

b) Viết giá trị gần đúng của $\sqrt[3]{100}$ chính xác đến hàng phần trăm và hàng phần nghìn.

47. Biết rằng tốc độ ánh sáng trong chân không là 300 000 km/s. Hỏi một năm ánh sáng đi được trong chân không là bao nhiêu (giả sử một năm có 365 ngày) ? (Hãy viết kết quả dưới dạng kí hiệu khoa học).

48. Một đơn vị thiên văn xấp xỉ bằng $1{,}496.10^8$ km. Một trạm vũ trụ di chuyển với vận tốc trung bình là 15 000 m/s. Hỏi trạm vũ trụ đó phải mất bao nhiêu giây mới đi được một đơn vị thiên văn ? (Hãy viết kết quả dưới dạng kí hiệu khoa học).

49. Vũ trụ có tuổi khoảng 15 tỉ năm. Hỏi Vũ trụ có bao nhiêu ngày tuổi (giả sử một năm có 365 ngày) ? (Hãy viết kết quả dưới dạng kí hiệu khoa học).

Bài đọc thêm

LOÀI NGƯỜI ĐÃ SỬ DỤNG CÁC HỆ ĐẾM CƠ SỐ NÀO ?

Đa số các dân tộc trên thế giới dùng hệ đếm thập phân để biểu diễn các số. Tuy nhiên, ngoài hệ thập phân còn có các hệ đếm cơ số khác.

Cho b là một số nguyên dương lớn hơn 1. Khi đó, mọi số nguyên dương n có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng $n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + ... + a_1 b + a_0$,

ở đây $k \in \mathbb{N}$, a_0, a_1, ..., a_k là các số nguyên không âm nhỏ hơn b và $a_k \neq 0$. Người ta kí hiệu $n = (a_k ... a_1 a_0)_b$ và gọi đó là biểu diễn của n trong hệ đếm cơ số b.

Hệ đếm sớm nhất của loài người không phải là hệ đếm thập phân mà là hệ đếm cơ số 60 của người Ba-bi-lon. Vào thời cổ đại, cũng có các bộ tộc dùng hệ đếm cơ số 5. Người Mai-a ở Nam Mĩ có một nền văn hoá khá độc đáo từng sử dụng hệ đếm cơ số 20. Tại Đan Mạch ngày nay, người ta vẫn còn dùng hệ đếm cơ số 20. Người Anh rất thích dùng hệ đếm cơ số 12, người ta tính 12 bút chì là một tá bút chì, 24 bút chì là hai tá bút chì.

Đến khi có máy tính điện tử thì hệ nhị phân lại được ưa chuộng. Trong hệ nhị phân để ghi các con số, ta chỉ cần hai chữ số 0 và 1. Có thể dùng số 1 biểu diễn việc đóng mạch, số 0 biểu diễn việc ngắt mạch ; hoặc 1 biểu diễn trạng thái bị từ hoá, 0 là trạng thái không bị từ hoá, ... Từ đó cho thấy hệ nhị phân rất thích hợp cho việc biểu diễn các thông tin trên máy tính.

Chẳng hạn, do $69 = 2^6 + 2^2 + 2^0$ nên 69 được viết trong hệ nhị phân là $(1000101)_2$. Số 351 có biểu diễn trong hệ nhị phân là $(101011111)_2$ vì $(101011111)_2 = 2^8+2^6+2^4+2^3+2^2+2+1 = 351$. Số 100 000 được viết dưới dạng nhị phân là $(11000011010100000)_2$.

Nhược điểm của hệ nhị phân là các số viết trong hệ nhị phân đều dài và khó đọc. Để khắc phục điều này trong máy tính, người ta dùng hai hệ đếm bổ trợ là hệ đếm cơ số 8 và hệ đếm cơ số 16. Độ dài một số viết ra trong hệ đếm cơ số 8 chỉ bằng khoảng $\frac{1}{3}$ độ dài viết trong hệ nhị phân và không khác mấy so với viết trong hệ thập phân.

Tương tự như vậy, độ dài một số viết ra trong hệ đếm cơ số 16 chỉ bằng khoảng $\frac{1}{4}$ độ dài viết trong hệ nhị phân. Việc chuyển đổi giữa hệ nhị phân sang hệ đếm cơ số 8 hay 16 và ngược lại rất đơn giản. Vì thế, hệ đếm cơ số 8 và 16 đã trợ giúp đắc lực cho việc giao tiếp giữa người và máy tính.

Em có biết

LỊCH SỬ CỦA VIỆC TÍNH GẦN ĐÚNG SỐ π

Số π là số vô tỉ, nó có biểu diễn thập phân là số thập phân vô hạn không tuần hoàn. Trong lịch sử toán học đã xuất hiện một "cuộc đua" nhằm đạt kỉ lục về việc tính gần đúng số π với nhiều chữ số (nghĩa là với độ chính xác càng cao). Người đầu tiên tính số π tới bảy chữ số là Tô Xung Chi, nhà toán học Trung Quốc (thế kỉ V). Nhà toán học Ru-đôn-phơ (C. Rudolff, 1499 – 1545) người Đức đã tính số π tới 35 chữ số. Ông rất tự hào về điều này và để lại di chúc khắc 35 chữ số này trên bia mộ của ông. Ngày nay với sự trợ giúp của máy tính, các kỉ lục về tính số π với nhiều chữ số liên tiếp bị vượt qua trong một thời gian ngắn. Chúng ta xem bảng sau đây sẽ rõ.

Năm	Quốc tịch người tính số π	Số chữ số của số π
1957	Mĩ	100 265
1973	Pháp	1 triệu
1983	Nhật	16 triệu
1986	Mĩ	30 triệu
1987	Nhật	1335 triệu
1989	Mĩ	4 tỉ
2002	Nhật	1241 tỉ