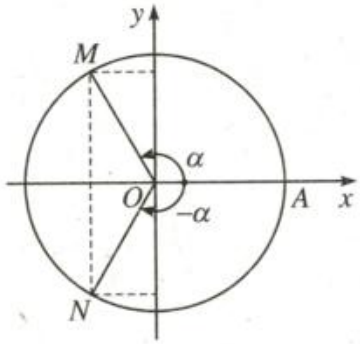
§ 3 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC GÓC (CUNG) CÓ LIÊN QUAN ĐẶC BIỆT

H *Xét hai điểm M, N thuộc đường tròn lượng giác xác định bởi hai góc có liên quan nêu trong bốn trường hợp 1, 2, 3, 4 dưới đây. Có nhận xét gì về vị trí của hai điểm M, N đối với hệ trục toạ độ Oxy cho mỗi trường hợp ? Từ đó giải thích tại sao có các công thức sau đây (chỉ xét các góc lượng giác mà biểu thức trong công thức có nghĩa).*

1. Hai góc đối nhau

$(OA, OM) = \alpha$, $(OA, ON) = -\alpha$ (h.6.20).

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin\alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos\alpha \\ \tan(-\alpha) &= -\tan\alpha \\ \cot(-\alpha) &= -\cot\alpha. \end{aligned}}$$

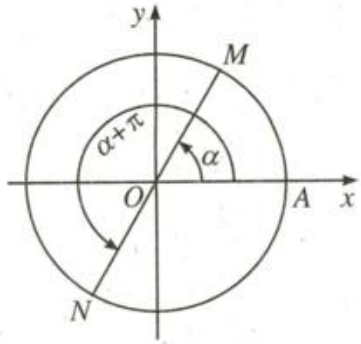


Hình 6.20

2. Hai góc hơn kém nhau π

$(OA, OM) = \alpha$, $(OA, ON) = \alpha + \pi$ (h.6.21).

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(\alpha+\pi) &= -\sin\alpha \\ \cos(\alpha+\pi) &= -\cos\alpha \\ \tan(\alpha+\pi) &= \tan\alpha \\ \cot(\alpha+\pi) &= \cot\alpha. \end{aligned}}$$

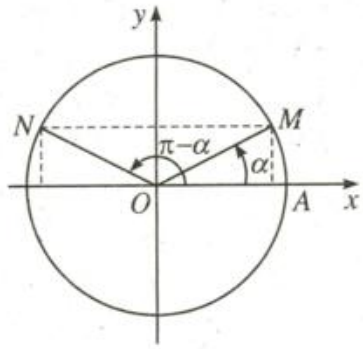


Hình 6.21

3. Hai góc bù nhau

$(OA, OM) = \alpha$, $(OA, ON) = \pi - \alpha$ (h.6.22).

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(\pi-\alpha) &= \sin\alpha \\ \cos(\pi-\alpha) &= -\cos\alpha \\ \tan(\pi-\alpha) &= -\tan\alpha \\ \cot(\pi-\alpha) &= -\cot\alpha. \end{aligned}}$$

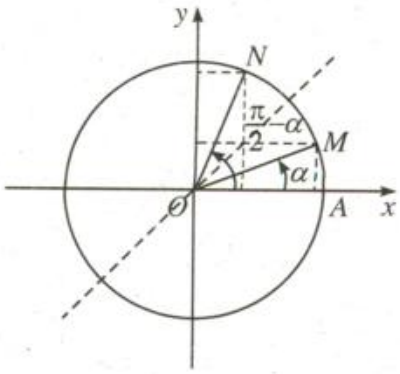


Hình 6.22

4. Hai góc phụ nhau

$(OA, OM) = \alpha$, $(OA, ON) = \frac{\pi}{2} - \alpha$ (h.6.23).

$$\boxed{\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos\alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin\alpha \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cot\alpha \\ \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \tan\alpha. \end{aligned}}$$



Hình 6.23

Nhận xét. Nhờ các công thức trên, ta có thể đưa việc tính giá trị lượng giác của một góc lượng giác tuỳ ý về việc tính giá trị lượng giác của góc α, $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$, thậm chí $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{4}$.

Vậy có thể dùng bảng tra cứu sin và côsin của các góc có số đo a^o $(0 \le a \le 45)$ để tìm sin và côsin của các góc lượng giác tuỳ ý. Chẳng hạn để tìm $\sin(-100^o)$, ta có thể tiến hành như sau :

$$\sin(-100^o) = -\sin 100^o = -\sin(180^o - 100^o)$$
$$= -\sin 80^o = -\cos(90^o - 80^o) = -\cos 10^o.$$

Ví dụ

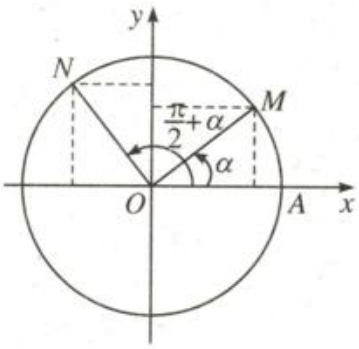
a) Từ các công thức trên, ta dễ dàng suy ra các công thức thường gặp sau đây về hai góc hơn kém nhau $\frac{\pi}{2}$ (cũng có thể dùng hình vẽ để nhìn nhận các công thức này, xem hình 6.24).

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-\alpha)\right) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha;$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-\alpha)\right) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha;$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot\alpha;$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan\alpha.$$



Hình 6.24

b) $\cos\left(-\frac{13\pi}{4}\right) = \cos\frac{13\pi}{4} = \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right)$

$$= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

c) $\tan 10^o \tan 20^o \tan 30^o \tan 40^o \tan 50^o \tan 60^o \tan 70^o \tan 80^o =$

$= (\tan 10^o \tan 80^o).(\tan 20^o \tan 70^o).(\tan 30^o \tan 60^o).(\tan 40^o \tan 50^o) = 1$

(do $\tan a^o \tan(90^o - a^o) = \tan a^o \cot a^o = 1$). □

CHÚ Ý

Nếu số đo của góc hình học uOv là α $(0 \le \alpha \le \pi)$ thì số đo của góc lượng giác tuỳ ý (Ou, Ov) bằng $\alpha + k2\pi$ hoặc $-\alpha + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Do đó, từ các công thức $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$; $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, ta có

$$\cos\widehat{uOv} = \cos(Ou, Ov),\ \sin\widehat{uOv} = |\sin(Ou, Ov)|$$

với một góc lượng giác (Ou, Ov) tuỳ ý.

Câu hỏi và bài tập

24. Mỗi khẳng định sau đúng hay sai ?

a) Khi α đổi dấu (tức thay α bởi $-\alpha$) thì $\cos\alpha$ và $\sin\alpha$ đổi dấu còn $\tan\alpha$ không đổi dấu.

b) Với mọi α, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha$.

c) Với mọi α, $\left|\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \cos(\alpha + \pi)\right| + \left|\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\alpha - \pi)\right| = 0.$

d) Nếu $\cos\alpha \ne 0$ thì $\frac{\cos(-5\alpha)}{\cos\alpha} = \frac{-5\alpha}{\alpha} = -5.$

e) $\cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} = 1.$ g) $\sin\frac{\pi}{10} = \cos\frac{2\pi}{5}.$

25. Tìm các mối liên hệ giữa các giá trị lượng giác của các cung α và $\alpha - \frac{3\pi}{2}$.

26. Tính :

a) $\sin^2 10^o + \sin^2 20^o + \sin^2 30^o + ... + \sin^2 80^o$ (8 số hạng) ;

b) $\cos 10^o + \cos 20^o + \cos 30^o + ... + \cos 180^o$ (18 số hạng) ;

c) $\cos 315^o + \sin 330^o + \sin 250^o - \cos 160^o$.

27. Dùng bảng tính sin, côsin (hoặc dùng máy tính bỏ túi) để tính các giá trị sau (chính xác đến hàng phần nghìn) :

$$\cos(-250^o) \text{ ; } \sin 520^o \text{ và } \sin\frac{11\pi}{10}.$$

28. Xét hệ toạ độ vuông góc Oxy gắn với đường tròn lượng giác. Kiểm nghiệm rằng điểm M với toạ độ $\left(-\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$ nằm trên đường tròn lượng giác đó. Giả sử điểm M xác định bởi số α. Tìm toạ độ các điểm xác định bởi các số :

$$\pi - \alpha; \pi + \alpha; \frac{\pi}{2} - \alpha \text{ và } \frac{\pi}{2} + \alpha.$$

29. Biết $\tan 15^o = 2 - \sqrt{3}$, hãy tính các giá trị lượng giác của góc -75°.

Luyện tập

30. Hỏi các góc lượng giác có cùng tia đầu và có số đo như sau :

$$2594^o ; -646^o ; -2446^o \text{ và } 74^o$$

thì có cùng tia cuối không ?

31. Xác định dấu của các giá trị lượng giác sau :

$$\cos 250^o ; \tan(-672^o) ; \tan\frac{31\pi}{8} ; \sin(-1050^o) \text{ và } \cos\frac{16\pi}{5}.$$

32. Hãy tính các giá trị lượng giác của góc α trong mỗi trường hợp sau :

a) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ và $\cos\alpha < 0$; b) $\cos\alpha = -\frac{8}{17}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

c) $\tan\alpha = \sqrt{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

33. a) Tính $\sin\frac{25\pi}{6} + \cos\frac{25\pi}{3} + \tan\left(-\frac{25\pi}{4}\right)$.

b) Biết $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{1}{3}$, tính $\cos(2\pi - \alpha)$, $\tan(\alpha - 7\pi)$ và $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.

34. Chứng minh rằng :

a) $\dfrac{1-2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\dfrac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$ (khi các biểu thức đó có nghĩa) ;

b) $\tan^2\alpha-\sin^2\alpha=\tan^2\alpha\sin^2\alpha$; c) $2(1-\sin\alpha)(1+\cos\alpha)=(1-\sin\alpha+\cos\alpha)^2$.

35. Biết $\sin\alpha-\cos\alpha=m$, hãy tính $\sin^3\alpha-\cos^3\alpha$.

36. Với số α, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, xét điểm M của đường tròn lượng giác xác định bởi số 2α rồi xét tam giác vuông $A'MA$ (A' đối xứng với A qua tâm O của đường tròn).

a) Tính AM^2 bằng hai cách khác nhau để suy ra $\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha$.

b) Tính diện tích của tam giác $A'MA$ bằng hai cách khác nhau để suy ra $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.

c) Chứng minh $\sin\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $\cos\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ rồi tính các giá trị lượng giác của các góc $\dfrac{3\pi}{8}$ và $\dfrac{5\pi}{8}$.

37. Trong hệ toạ độ vuông góc Oxy gắn với một đường tròn lượng giác, cho điểm P có toạ độ $(2\,;-3)$.

a) Chứng tỏ rằng điểm M sao cho $\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}$ là giao điểm của tia OP với đường tròn lượng giác đó.

b) Tính toạ độ của điểm M và từ đó suy ra côsin, sin của góc lượng giác (Ox, OP).

Em có biết

ĐIỀU LẠ : $\sin\left(\dfrac{180\pi}{180+\pi}\right)^{\circ}=\sin\left(\dfrac{180\pi}{180+\pi}\right)$!

Thật vậy, đặt $x=\dfrac{180\pi}{180+\pi}$ thì ta có

$$\sin x=\sin(\pi-x)=\sin\left(\pi-\frac{180\pi}{180+\pi}\right)=\sin\frac{\pi^2}{180+\pi}$$

$$=\sin\frac{\pi x}{180}=\sin x^{\circ}\ \text{(chú ý rằng } x^{\circ}=\frac{\pi x}{180}rad\text{)}.$$

Có thể thử lại **điều lạ** này nhờ máy tính bỏ túi CASIO *fx – 500MS* bằng cách ấn

180 [×] [SHIFT] π [÷] [(] 180 [+] [SHIFT] π [=] [SHIFT] [STO] [A]

[ON] [MODE] [MODE] [MODE] [1] [sin] [ALPHA] [A] [=]

Kết quả là 0,053 864 486.

Ấn tiếp :

[ON] [MODE] [MODE] [MODE] [2] [sin] [ALPHA] [A] [=]

Cho kết quả 0,053 864 486.

Các số $y = (2k+1)\dfrac{180\pi}{180+\pi} \quad (k \in \mathbb{Z})$,

$$z = l.\frac{360\pi}{180-\pi} \quad (l \in \mathbb{Z})$$

cũng có tính chất $\sin y = \sin y^{\circ}$, $\sin z = \sin z^{\circ}$.