§ 2 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC (CUNG) LƯỢNG GIÁC

Trong mục này, ta sẽ mở rộng các giá trị lượng giác của góc hình học thành giá trị lượng giác của góc lượng giác. Đó là cơ sở để xây dựng các hàm số lượng giác, những hàm số quan trọng trong toán học, khoa học và kĩ thuật, liên quan mật thiết đến thực tiễn.

1. Đường tròn lượng giác

a) Định nghĩa

> ***Đường tròn lượng giác*** *là một đường tròn đơn vị (bán kính bằng 1), định hướng, trên đó có một điểm A gọi là điểm gốc.*

Nhắc lại rằng người ta luôn quy ước *trên đường tròn lượng giác, chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ là chiều dương và chiều quay của kim đồng hồ là chiều âm.*

b) Tương ứng giữa số thực và điểm trên đường tròn lượng giác

Cho đường tròn lượng giác tâm O, gốc A. Với mỗi số thực α, hiển nhiên có một cung lượng giác duy nhất $\overset{\frown}{AM}$ có số đo α (rad), cũng có nghĩa là có một góc lượng giác duy nhất (OA, OM) có số đo α. Cung và góc lượng giác đó gọi tắt là ***cung*** $\boldsymbol{\alpha}$ và ***góc*** $\boldsymbol{\alpha}$; đôi khi ta cũng viết $\overset{\frown}{AM} = \alpha$ và $(OA, OM) = \alpha$.

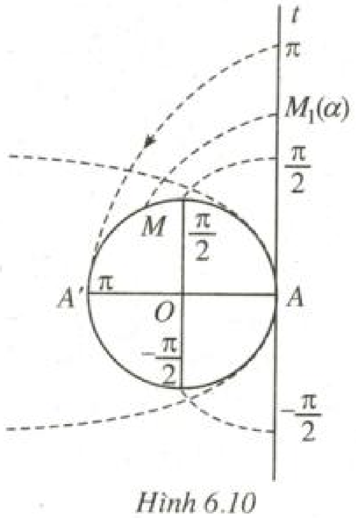
> *Điểm M thuộc đường tròn lượng giác sao cho* $(OA, OM) = \alpha$ *gọi là* ***điểm xác định bởi số*** $\boldsymbol{\alpha}$ *(hay bởi cung* α*, hay bởi góc* α*). Điểm M còn được gọi là điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn cung (góc) lượng giác có số đo* α*.*

Ta nhận xét ngay rằng :

Ứng với mỗi số thực α *có một điểm trên đường tròn lượng giác (điểm xác định bởi số đó) tương tự như trên trục số. Tuy nhiên, mỗi điểm trên đường tròn lượng giác ứng với vô số số thực. Các số thực đó có dạng* $\alpha + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

H1 *Để thấy rõ hơn tương ứng giữa số thực và điểm trên đường tròn lượng giác, hãy xét trục số At (gốc A) là tiếp tuyến của đường tròn lượng giác tại A, hình dung At là một sợi dây và quấn dây đó quanh đường tròn lượng giác như ở hình 6.10 : Điểm* M_1 *trên trục At có toạ độ* α *đến trùng với điểm M trên đường tròn lượng giác thoả mãn sđ* $\overset{\frown}{AM} = \alpha$*, tức M xác định bởi* α*. Hỏi :*

a) Các điểm nào trên trục số At đến trùng với điểm A trên đường tròn lượng giác ?



Hình 6.10

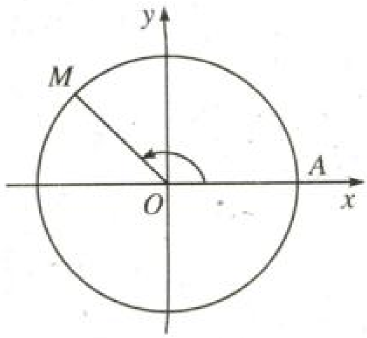
b) Các điểm nào trên trục số At đến trùng với điểm A' trên đường tròn lượng giác (A' là điểm đối xứng của A qua tâm O của đường tròn) ? Hai điểm tuỳ ý trong số các điểm đó cách nhau bao nhiêu ?

c) Hệ toạ độ vuông góc gắn với đường tròn lượng giác

Cho đường tròn lượng giác tâm O, điểm gốc A. Xét hệ toạ độ vuông góc Oxy sao cho tia Ox trùng với tia OA, góc lượng giác (Ox, Oy) là góc $\frac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (h.6.11). Hệ toạ độ đó được gọi là ***hệ toạ độ vuông góc gắn với đường tròn lượng giác*** đã cho.

Sau này, ta luôn xét đường tròn lượng giác trong hệ toạ độ vuông góc gắn với nó.

H2 *Tìm toạ độ của điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho cung lượng giác $\overset{\frown}{AM}$ có số đo $\dfrac{3\pi}{4}$ (h.6.11).*

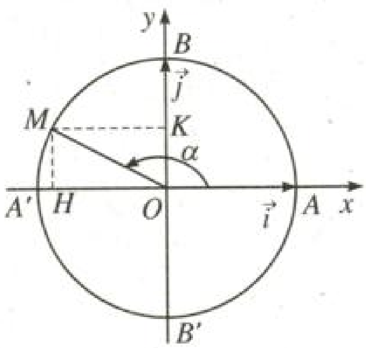


Hình 6.11

2. Giá trị lượng giác sin và côsin

a) Các định nghĩa

Với mỗi góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo α, lấy điểm M trên đường tròn lượng giác để $(OA, OM) = \alpha$, tức là điểm M xác định bởi số α (h.6.12). Gọi toạ độ của M trong hệ toạ độ gắn với đường tròn đó là $(x ; y)$.

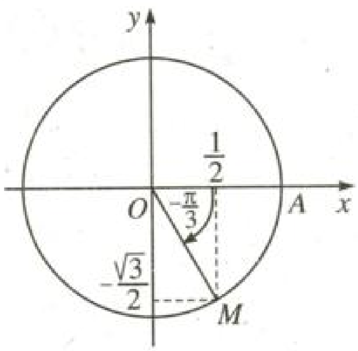


Hình 6.12

> *Hoành độ x của M* được *gọi là* **côsin** *của góc lượng giác (Ou, Ov) hay của α và kí hiệu*
>
> $$\cos(Ou, Ov) = \cos\alpha = x.$$
>
> *Tung độ y của M* được *gọi là* **sin** *của góc lượng giác (Ou, Ov) hay của α và kí hiệu*
>
> $$\sin(Ou, Ov) = \sin\alpha = y.$$

Nếu sđ$(Ou, Ov) = a^{\circ}$ thì ta cũng viết

$$\cos(Ou, Ov) = \cos a^{\circ},$$
$$\sin(Ou, Ov) = \sin a^{\circ}.$$



Hình 6.13

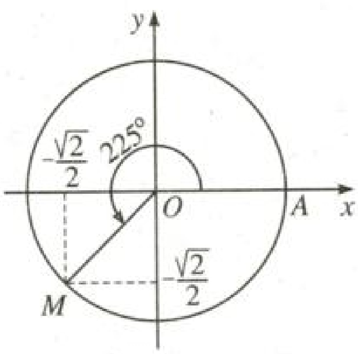
Ví dụ 1

a) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$;

$\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (h.6.13).

b) $\sin 225^{\circ} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$\cos 225^{\circ} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (h.6.14). □



Hình 6.14

CHÚ Ý

Gọi $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OB}$ là các vectơ đơn vị trên trục hoành và trục tung (h.6.12). Khi đó, nếu điểm M thuộc đường tròn lượng giác xác định bởi số α thì

$$\overrightarrow{OM} = (\cos\alpha)\,\vec{i} + (\sin\alpha)\,\vec{j},$$

tức là M có toạ độ $(\cos\alpha\,;\,\sin\alpha)$.

Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của điểm M trên Ox và Oy thì $\overrightarrow{OH} = (\cos\alpha)\vec{i}$ và $\overrightarrow{OK} = (\sin\alpha)\,\vec{j}$, tức là

$$\boxed{\cos\alpha = \overline{OH}\ ;\ \sin\alpha = \overline{OK}\,.}$$

Trong lượng giác, người ta còn gọi trục Ox là ***trục côsin*** và trục Oy là ***trục sin***.

H3

a) Tìm α để $\sin\alpha = 0$. Khi đó, $\cos\alpha$ bằng bao nhiêu ?

b) Tìm α để $\cos\alpha = 0$. Khi đó, $\sin\alpha$ bằng bao nhiêu ?

b) Tính chất

1) Vì các góc lượng giác $\alpha + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ cùng xác định một điểm M trên đường tròn lượng giác nên ta có

$$\boxed{\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha\ ;\ \sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha.}$$

2) Với mọi α, ta luôn có

$$\boxed{-1 \le \cos\alpha \le 1\ ;\ -1 \le \sin\alpha \le 1.}$$

3) Vì $OH^2 + OK^2 = OM^2 = 1$ (h.6.12) nên ta có

$$\boxed{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.}$$

H4

a) Trên đường tròn lượng giác gốc A, xét cung lượng giác $\overset{\frown}{AM}$ có số đo α. Hỏi điểm M nằm trong nửa mặt phẳng nào thì $\cos\alpha > 0$, trong nửa mặt phẳng nào thì $\cos\alpha < 0$? Vẽ hình minh hoạ. Cũng câu hỏi đó cho $\sin\alpha$.

b) Hãy xác định dấu của $\sin 3$ và $\cos 3$.

3. Giá trị lượng giác tang và côtang

a) Các định nghĩa

Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo α.

> *Nếu* $\cos\alpha \neq 0$ (tức $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$) *thì tỉ số* $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ *được gọi là* ***tang*** *của góc* α*, kí hiệu là* $\tan\alpha$ (*người ta còn dùng kí hiệu* $\mathrm{tg}\alpha$).

Vậy

$$\tan(Ou, Ov) = \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

> *Nếu* $\sin\alpha \neq 0$ (tức $\alpha \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$) *thì tỉ số* $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ *được gọi là* ***côtang*** *của góc* α*, kí hiệu là* $\cot\alpha$ (*người ta còn dùng kí hiệu* $\mathrm{cotg}\alpha$).

Vậy

$$\cot(Ou, Ov) = \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Khi sđ $(Ou, Ov) = a^{o}$, ta cũng viết

$$\tan(Ou, Ov) = \tan a^{o}; \qquad \cot(Ou, Ov) = \cot a^{o}.$$

Ví dụ 2. Theo ví dụ 1, ta có

a) $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = \dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$;

b) $\cot 225^{o} = \dfrac{\cos 225^{o}}{\sin 225^{o}} = \dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.$ □

b) Ý nghĩa hình học

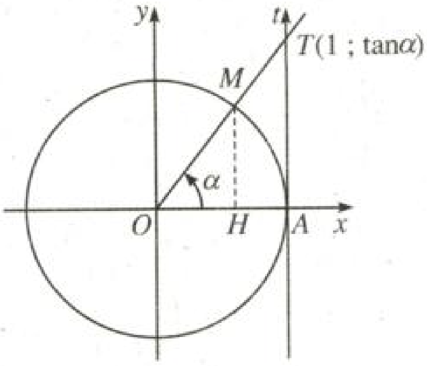
• Xét trục số At gốc A, tiếp xúc với đường tròn lượng giác tại điểm gốc A và cùng hướng với trục Oy. Khi $(OA, OM) = \alpha$ sao cho $\cos\alpha \neq 0$ thì đường thẳng OM cắt trục At tại điểm T có toạ độ là $(1\ ;\ \tan\alpha)$, tức là

$$\boxed{\tan\alpha = \overline{AT}.}$$

Thực vậy, đường thẳng qua gốc O (khác Oy) có phương trình $y = kx$ nên nó đi qua điểm $M(\cos\alpha\ ;\ \sin\alpha)$ khi và chỉ khi $k = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Vậy phương trình đường thẳng OM là $y = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.x$ (h.6.15). Rõ ràng, giao điểm T đang xét có hoành độ $x = 1$ nên tung độ của T là $y = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$.

Vì vậy, trục At còn gọi là ***trục tang***.



Hình 6.15

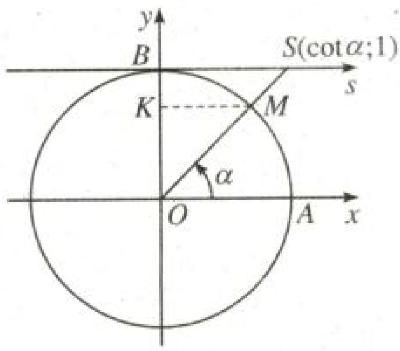
• Xét trục số Bs gốc B tiếp xúc với đường tròn lượng giác tại $B(0\ ;\ 1)$, cùng hướng với Ox (h.6.16).

Khi $(OA, OM) = \alpha$ mà $\sin\alpha \neq 0$ thì đường thẳng OM cắt trục Bs tại điểm S có toạ độ là $(\cot\alpha\ ;\ 1)$, tức là

$$\boxed{\cot\alpha = \overline{BS}}$$

(chứng minh tương tự như trên).

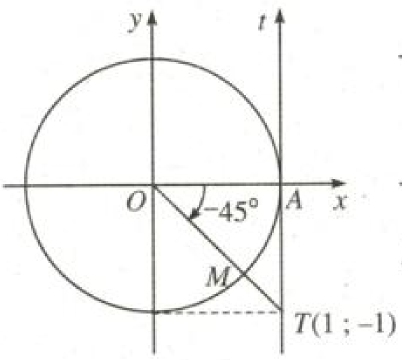
Vì vậy, trục Bs còn gọi là ***trục côtang***.



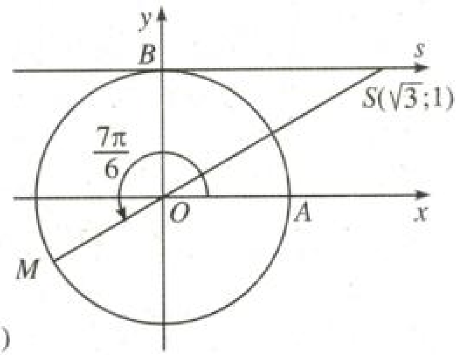
Hình 6.16

Ví dụ 3. a) $\tan(-45^\circ) = -1$ (h.6.17).

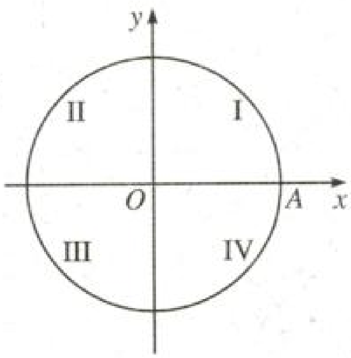
b) $\cot\left(\dfrac{7\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$ (h.6.18). □



Hình 6.17



Hình 6.18



Hình 6.19

H5 *Các trục toạ độ Ox, Oy chia mặt phẳng thành bốn góc phần tư I, II, III, IV (h.6.19). Hỏi với điểm M nằm trong góc phần tư nào thì*

a) $\tan(OA, OM) > 0$?

b) $\cot(OA, OM) < 0$?

c) Tính chất

1) Từ ý nghĩa hình học nói trên, suy ra : Với mọi $k \in \mathbb{Z}$, ta có

$$\boxed{\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha\,;\ \cot(\alpha + k\pi) = \cot\alpha}$$

(khi các biểu thức có nghĩa).

2) Từ định nghĩa tang và côtang, suy ra

Khi $\sin\alpha.\cos\alpha \neq 0$ (tức khi $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$), ta có

$$\boxed{\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}.}$$

3) Từ định nghĩa tang và côtang và từ công thức $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, ta suy ra ngay các công thức

Khi $\cos\alpha \neq 0$, $\boxed{1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}.}$

Khi $\sin\alpha \neq 0$, $\boxed{1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.}$

4. Tìm giá trị lượng giác của một số góc

• Từ định nghĩa các giá trị lượng giác nói trên, ta thấy : Nếu góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo α, $0 \leq \alpha \leq \pi$ thì các giá trị lượng giác của nó bằng các giá trị lượng giác của góc hình học uOv đã học trước đây. Vậy ta có bảng sau :

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Không xác định
$\cot\alpha$	Không xác định	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

• Khi biết một giá trị lượng giác của góc α, có thể dùng các công thức lượng giác ở mục 2, mục 3 và dấu của giá trị lượng giác để tính toán các giá trị lượng giác còn lại của góc α.

Ví dụ 4. Cho α, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Hãy tìm $\cos\alpha$, nếu biết $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$.

Giải. Do $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\cos\alpha < 0$, từ đó

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\frac{3}{5}.$$ □

Ví dụ 5. Cho α, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Hãy tìm $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, biết $\tan\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Giải. Do $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ nên $\cos\alpha > 0$. Vậy từ

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{1+\frac{5}{4}} = \frac{4}{9},$$

suy ra $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ và từ đó $\sin\alpha = \cos\alpha.\tan\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$. □

CHÚ Ý

Vì cho góc lượng giác (Ou, Ov) cũng có nghĩa là cho cung lượng giác $\overset{\frown}{UV}$ tương ứng trên đường tròn lượng giác tâm O, nên nói về các giá trị lượng giác của góc (Ou, Ov) cũng có nghĩa là nói về các giá trị lượng giác của cung $\overset{\frown}{UV}$ tương ứng.

Câu hỏi và bài tập

14. Mỗi khẳng định sau đúng hay sai ?

a) Nếu α âm thì ít nhất một trong các số $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ phải âm.

b) Nếu α dương thì $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$.

c) Các điểm trên đường tròn lượng giác xác định bởi các số thực sau trùng nhau :

$$\frac{\pi}{4};\ -\frac{7\pi}{4};\ \frac{13\pi}{4} \text{ và } -\frac{71\pi}{4}.$$

d) Ba số sau bằng nhau :

$$\cos^2 45^\circ ; \sin\left(\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}\right) \text{ và } -\sin 210^\circ.$$

e) Hai số sau khác nhau :

$$\sin\frac{11\pi}{6} \text{ và } \sin\left(\frac{5\pi}{6} + 1505\pi\right).$$

g) Các điểm của đường tròn lượng giác lần lượt xác định bởi các số 0 ; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; π ; $-\frac{2\pi}{3}$ và $-\frac{\pi}{3}$ là các đỉnh liên tiếp của một lục giác đều.

15. Tìm các điểm của đường tròn lượng giác xác định bởi số α trong mỗi trường hợp sau :

a) $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$; b) $\sqrt{\sin^2\alpha} = \sin\alpha$; c) $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$.

16. Xác định dấu của các số sau :

a) $\sin 156^\circ$; $\cos(-80^\circ)$; $\tan\left(-\frac{17\pi}{8}\right)$ và $\tan 556^\circ$;

b) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$; $\cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{8}\right)$ và $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$, biết rằng $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

17. Tính các giá trị lượng giác của các góc sau :

a) $-\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi$; b) $k\pi$; c) $\frac{\pi}{2} + k\pi$; d) $\frac{\pi}{4} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

18. Tính các giá trị lượng giác của góc α trong mỗi trường hợp sau :

a) $\cos\alpha = \frac{1}{4}$, $\sin\alpha < 0$; b) $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

c) $\tan\alpha = \frac{1}{2}$, $-\pi < \alpha < 0$.

19. Đơn giản các biểu thức :

a) $\sqrt{\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha}$; b) $\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin^2\alpha} - \dfrac{1}{1+\cos\alpha}$ (giả sử $\sin\alpha \neq 0$) ;

c) $\dfrac{1-\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \cos^2\alpha$ (giả sử $\cos\alpha \neq 0$).

Luyện tập

20. Tính các giá trị lượng giác của các góc sau :

$$225^\circ, -225^\circ, 750^\circ, -510^\circ, \frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}, -\frac{10\pi}{3}, -\frac{17\pi}{3}.$$

21. Xét góc lượng giác $(OA, OM) = \alpha$, trong đó M là điểm không nằm trên các trục toạ độ Ox, Oy. Hãy lập bảng dấu của $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ theo vị trí của M thuộc các góc phần tư I, II, III, IV trong hệ toạ độ Oxy. Hỏi M ở trong góc phần tư nào thì :

a) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ cùng dấu ?

b) $\sin\alpha$, $\tan\alpha$ khác dấu ?

22. Chứng minh các đẳng thức sau :

a) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$;

b) $1 - \cot^4\alpha = \dfrac{2}{\sin^2\alpha} - \dfrac{1}{\sin^4\alpha}$ (nếu $\sin\alpha \neq 0$) ;

c) $\dfrac{1 + \sin^2\alpha}{1 - \sin^2\alpha} = 1 + 2\tan^2\alpha$ (nếu $\sin\alpha \neq \pm 1$).

23. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc α :

a) $\sqrt{\sin^4\alpha + 4\cos^2\alpha} + \sqrt{\cos^4\alpha + 4\sin^2\alpha}$;

b) $2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) - 3(\cos^4\alpha + \sin^4\alpha)$;

c) $\dfrac{2}{\tan\alpha - 1} + \dfrac{\cot\alpha + 1}{\cot\alpha - 1}$ (nếu $\tan\alpha \neq 1$).

Bài đọc thêm

SỬ DỤNG MÁY TÍNH BỎ TÚI ĐỂ ĐỔI SỐ ĐO GÓC VÀ TÌM GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

Có thể dùng máy tính bỏ túi để tìm giá trị lượng giác của góc lượng giác và đổi số đo độ của cung tròn ra rađian và ngược lại. Chẳng hạn, dùng máy tính CASIO *fx – 500MS* :

– Để tính sin $\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$ thì ấn

$\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\sin}$ $\boxed{(}$ $\boxed{(-)}$ 9 $\boxed{\text{SHIFT}}$ π $\boxed{\div}$ 4 $\boxed{=}$

Kết quả là $-0,707\,106\,781$ $\left(\approx -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

– Để tính tan $63^o52'41''$ thì ấn

$\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{\tan}$ 63 $\boxed{{\circ}\,{'}\,{''}}$ 52 $\boxed{{\circ}\,{'}\,{''}}$ 41 $\boxed{{\circ}\,{'}\,{''}}$ $\boxed{=}$

Kết quả là $2,039\,276\,645$.

– Để đổi $33^o45'$ ra rađian thì ấn

$\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{2}$ 33 $\boxed{{\circ}\,{'}\,{''}}$ 45 $\boxed{{\circ}\,{'}\,{''}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{DRG}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$

Kết quả là $0,589\,048\,622$.

– Để đổi $\frac{3}{4}$ rad ra độ thì ấn

$\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{(}$ 3 $\boxed{\div}$ 4 $\boxed{)}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{DRG}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{{\circ}\,{'}\,{''}}$

Kết quả là $42^o58'19''$ (xấp xỉ).