

§ 1

GÓC VÀ CUNG LƯỢNG GIÁC

Ta đã có khái niệm góc giữa hai tia chung gốc mà người ta còn gọi là *góc hình học*. Trong bài này, ta sẽ xây dựng khái niệm góc lượng giác liên quan chặt chẽ với góc hình học.

1. Đơn vị đo góc và cung tròn, độ dài của cung tròn

a) Độ

Ta đã biết đường tròn bán kính R có độ dài bằng $2\pi R$ và có số đo bằng 360° . Nếu chia đường tròn thành 360 phần bằng nhau thì mỗi cung tròn này có độ dài bằng $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$ và có số đo 1° , góc ở tâm chắn mỗi cung đó có số đo bằng 1° .

Vậy cung tròn bán kính R có số đo a° ($0 \leq a \leq 360$) thì có độ dài

$$\frac{\pi a}{180} \cdot R.$$

Ví dụ 1

– Số đo của $\frac{3}{4}$ đường tròn là $\frac{3}{4} \cdot 360^\circ = 270^\circ$.

– Cung tròn bán kính R có số đo 72° thì có độ dài là $\frac{\pi \cdot 72}{180} \cdot R = \frac{2\pi R}{5}$. \square

H1 Một hải lí là độ dài cung tròn xích đạo có số đo $\left(\frac{1}{60}\right)^\circ = 1'$. Biết độ dài xích đạo là 40 000 km, hỏi một hải lí dài bao nhiêu kilômét?

b) Radian

Một đơn vị khác được sử dụng nhiều trong toán học, khoa học và kĩ thuật là radian. Nó tỏ ra thuận lợi khi tính độ dài cung tròn.

ĐỊNH NGHĨA

Cung tròn có độ dài bằng bán kính gọi là **cung có số đo 1 radian**, gọi tắt là **cung 1 radian**. Góc ở tâm chắn cung 1 radian gọi là **góc có số đo 1 radian**, gọi tắt là **góc 1 radian**.

1 radian còn viết tắt là 1 rad.

H2 Để hình dung góc 1 rad người ta quấn đoạn dây dài bằng bán kính đường tròn quanh đường tròn đó (h.6.1). Hãy làm điều trên và đo xem góc 1 rad xấp xỉ bằng bao nhiêu độ.

• Xét các cung của đường tròn bán kính R . Vì cung tròn có độ dài bằng R thì có số đo 1 rad nên :

– Toàn bộ đường tròn (do có độ dài bằng $2\pi R$) có số đo radian là $\frac{2\pi R}{R} = 2\pi$;

– Cung có độ dài bằng l thì có số đo radian là

$$\alpha = \frac{l}{R}$$

Vậy cung tròn bán kính R có số đo α radian thì có độ dài

$$l = \alpha R$$

và khi $R = 1$ (tức là trên đường tròn đơn vị) thì độ dài cung tròn bằng số đo radian của nó.

• Bây giờ, ta xét quan hệ giữa số đo radian và số đo độ của cùng một cung tròn.

Giả sử cung tròn có độ dài l . Gọi α là số đo radian và a là số đo độ của cung đó.

Khi đó, theo các công thức về độ dài cung, ta có

$$l = \alpha R = \frac{\pi a}{180} \cdot R,$$

suy ra

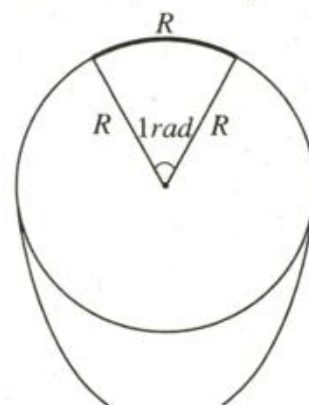
$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{a}{180}$$

Vậy cung có số đo 1 radian thì có số đo độ là $\frac{180}{\pi}$, tức là

$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57^\circ 17' 45''.$$

Cung có số đo 1 độ thì có số đo radian là $\frac{\pi}{180}$, tức là

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0,0175 \text{ rad}.$$



Hình 6.1

CHÚ Ý

Vì tính chất tự nhiên và thông dụng của radian, người ta thường không viết chữ radian hay rad sau số đo của cung và góc, chẳng hạn $\frac{\pi}{2}$ rad cũng được viết là $\frac{\pi}{2}$.

GHI NHỚ

Bảng chuyển đổi số đo độ và số đo radian của một số cung tròn

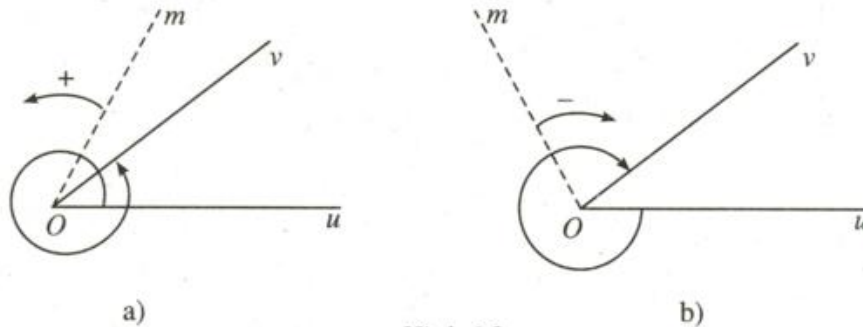
Độ	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
Radian	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

2. Góc và cung lượng giác

Khái niệm góc và cung lượng giác gắn chặt với việc quay quanh một điểm trong mặt phẳng.

a) Khái niệm góc lượng giác và số đo của chúng

• Để khảo sát việc quay tia Om quanh điểm O , ta cần chọn một chiều quay gọi là *chiều dương*. Thông thường, ta chọn đó là chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ (và chiều quay của kim đồng hồ gọi là *chiều âm*) (h.6.2).



Hình 6.2

Khi đó, nếu tia Om quay theo chiều dương đúng một vòng thì ta nói tia Om quay góc 360° (hay 2π rad), quay đúng hai vòng thì nói nó quay góc 720° (hay 4π rad), quay theo chiều âm nửa vòng thì nói nó quay góc -180° (hay $-\pi$ rad), quay theo chiều âm ba vòng bốn phần bảy (tức $\frac{25}{7}$ vòng) thì nói nó quay góc $-\frac{25}{7} \cdot 360^\circ$ (hay $-\frac{50\pi}{7}$ rad) ...

• Cho hai tia Ou, Ov . Nếu tia Om quay chỉ theo chiều dương (hay chỉ theo chiều âm) xuất phát từ tia Ou đến trùng với tia Ov thì ta nói : *Tia Om quét một góc lượng giác tia đầu Ou , tia cuối Ov* . Khi quay như thế, tia Om có thể gặp tia Ov nhiều lần, mỗi lần ta được một góc lượng giác tia đầu Ou , tia cuối Ov . Do đó, cho hai tia Ou, Ov thì có vô số góc lượng giác (một họ góc lượng giác) tia đầu Ou , tia cuối Ov . Mỗi góc lượng giác như thế đều được kí hiệu là (Ou, Ov) .

Khi tia Om quay góc a° (hay α rad) thì ta nói góc lượng giác mà tia đó quét nên có số đo a° (hay α rad).

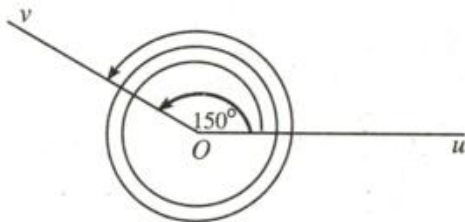
Như vậy :

Mỗi góc lượng giác gốc O được xác định bởi tia đầu Ou , tia cuối Ov và số đo độ (hay số đo radian) của nó.

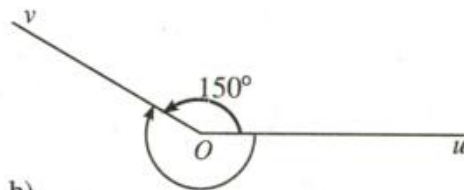
Ví dụ 2. Trên mỗi hình 6.3 a), b) đều có biểu diễn góc lượng giác tia đầu Ou , tia cuối Ov và có số đo 150° .

a) Góc thứ hai trên hình 6.3 a) có được do tia Om quay tiếp theo chiều dương hai vòng nữa nên có số đo $150^\circ + 2.360^\circ (= 870^\circ)$.

b) Góc thứ hai trên hình 6.3 b) có được do tia Om quay theo chiều âm từ Ou đến trùng Ov lần đầu tiên nên có số đo $-(360^\circ - 150^\circ) = 150^\circ - 360^\circ (= -210^\circ)$. Nếu cho tia Om quay tiếp một vòng nữa theo chiều âm thì được góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo $150^\circ - 2.360^\circ (= -570^\circ)$. \square



a) $150^\circ + 2.360^\circ = 870^\circ$



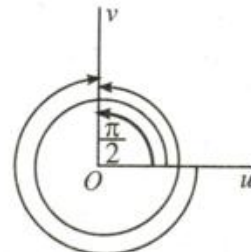
b)

Hình 6.3

H3 Trên hình 6.4 có ba góc lượng giác

(Ou, Ov) , trong đó một góc có số đo $\frac{\pi}{2}$.

Hỏi hai góc lượng giác còn lại có số đo bao nhiêu ?

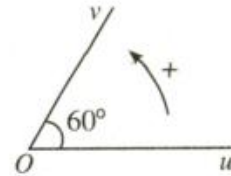


Hình 6.4

Tổng quát :

Nếu một góc lượng giác có số đo a° (hay α rad) thì mọi góc lượng giác cùng tia đầu, tia cuối với nó có số đo dạng $a^\circ + k360^\circ$ (hay $\alpha + k2\pi$ rad), k là số nguyên, mỗi góc ứng với một giá trị của k .

Ví dụ 3. Giả sử góc hình học uOv trên hình 6.5 có số đo 60° . Khi đó dễ thấy các góc lượng giác tia đầu Ou , tia cuối Ov có số đo $60^\circ + k360^\circ$, còn các góc lượng giác tia đầu Ov , tia cuối Ou có số đo $-60^\circ + k360^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$). \square



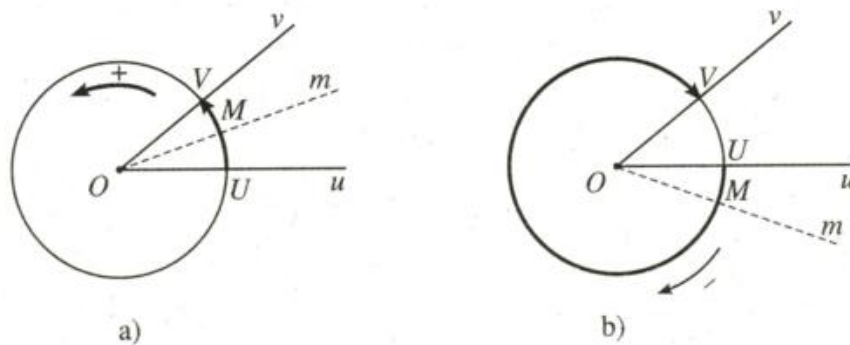
Hình 6.5

CHÚ Ý

Không được viết $a^\circ + k2\pi$ hay $\alpha + k360^\circ$ (vì không cùng đơn vị đo).

b) Khái niệm cung lượng giác và số đo của chúng

• Vẽ một đường tròn tâm O bán kính R . Nếu tia Om cắt đường tròn tại M thì việc cho tia Om quay quanh O cũng có nghĩa là cho điểm M chạy trên đường tròn đó. Chiều quay của tia Om cho ta chiều di động của điểm M trên đường tròn : chiều dương là chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ và chiều âm là chiều quay của kim đồng hồ như ở hình 6.6. Đường tròn với chiều di động đã được chọn như thế gọi là **đường tròn định hướng**.



Hình 6.6

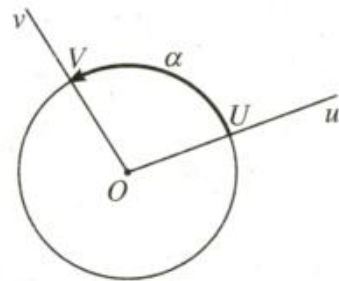
Gọi giao của các tia Ou , Ov nói trên với đường tròn đó là U và V . Khi tia Om quét nên góc lượng giác (Ou, Ov) thì điểm M chạy trên đường tròn luôn theo một chiều từ điểm U đến điểm V . Ta nói **điểm M vạch nên một cung lượng giác**

mút đầu (điểm đầu) U , mút cuối (điểm cuối) V , tương ứng với góc lượng giác (Ou, Ov) . Vậy hai điểm U và V trên đường tròn định hướng xác định vô số cung lượng giác (họ cung lượng giác) mút đầu U , mút cuối V , cùng được kí hiệu là \widehat{UV} .

• Ta coi số đo của góc lượng giác (Ou, Ov) là số đo của cung lượng giác \widehat{UV} tương ứng. Từ đó :

Trên đường tròn định hướng, mỗi cung lượng giác được xác định bởi mút đầu, mút cuối và số đo của nó. Nếu một cung lượng giác \widehat{UV} có số đo α thì mọi cung lượng giác cùng mút đầu U , mút cuối V có số đo dạng $\alpha + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$); mỗi cung ứng với một giá trị của k .

Nếu α là số đo của cung lượng giác \widehat{UV} vạch nên bởi điểm M chạy trên đường tròn theo chiều dương từ U đến gặp V lần đầu tiên thì $0 \leq \alpha < 2\pi$ và α chính là số đo của cung tròn (hình học) \widehat{UV} (h.6.7).



Hình 6.7

3. Hệ thức Sa-lơ



Mi-sen Sa-lơ
(Michel Chasles 1793 – 1880)

• Ta đã biết, độ dài đại số \overline{AB} của vectơ \overrightarrow{AB} trên trục số Ox (với vectơ đơn vị \vec{i}) là số xác định bởi $\overrightarrow{AB} = (\overline{AB})\vec{i}$. Khi đó, với ba điểm tùy ý A, B, C trên trục số, từ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ suy ra đẳng thức số $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ gọi là hệ thức Sa-lơ về độ dài đại số.

Ta thừa nhận một hệ thức có dạng tương tự gọi là **hệ thức Sa-lơ về số đo của góc lượng giác** :

Với ba tia tùy ý Ou, Ov, Ow , ta có

$$\text{sd}(Ou, Ov) + \text{sd}(Ov, Ow) = \text{sd}(Ou, Ow) + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Đó là một hệ thức quan trọng trong tính toán về số đo của góc lượng giác.

Từ hệ thức trên suy ra : Với ba tia tùy ý Ox, Ou, Ov , ta có

$$\text{sd}(Ou, Ov) = \text{sd}(Ox, Ov) - \text{sd}(Ox, Ou) + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ví dụ 4. Nếu một góc lượng giác (Ox, Ou) có số đo $-\frac{11\pi}{4}$ và một góc lượng giác (Ox, Ov) có số đo $\frac{3\pi}{4}$ thì mọi góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo $\frac{3\pi}{2} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). □

• Đối với các cung lượng giác, ta cũng có hệ thức Sa-lơ :

Với ba điểm tùy ý U, V, W trên đường tròn định hướng, ta có

$$\text{sđ } \overrightarrow{UV} + \text{sđ } \overrightarrow{VW} = \text{sđ } \overrightarrow{UW} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu hỏi và bài tập

1. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai ?
 - a) Số đo của cung tròn phụ thuộc vào bán kính của nó.
 - b) Độ dài cung tròn tỉ lệ với số đo của cung đó.
 - c) Độ dài cung tròn tỉ lệ với bán kính của nó.
 - d) Nếu Ou, Ov là hai tia đối nhau thì số đo của các góc lượng giác (Ou, Ov) là $(2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}$.
2. Kim phút và kim giờ của đồng hồ lớn nhà Bưu điện TP. Hà Nội theo thứ tự dài 1,75 m và 1,26 m. Hỏi trong 15 phút, mũi kim phút vạch nên cung tròn có độ dài bao nhiêu mét ? Cũng câu hỏi đó cho mũi kim giờ.
3. Điền vào các ô trống trong bảng

Số đo độ	-60°	-240°			3100°	
Số đo radian			$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{16\pi}{3}$		$\frac{68\pi}{5}$

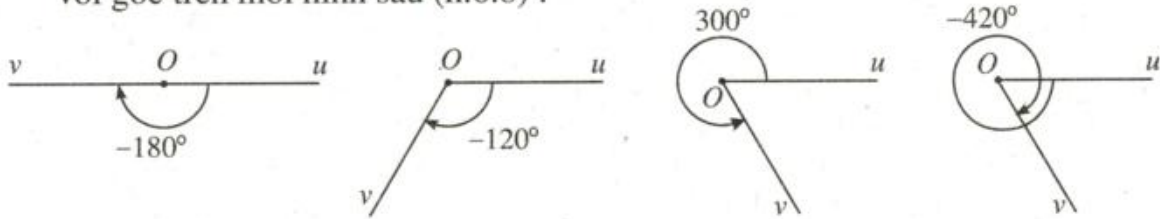
4. a) Đổi số đo độ của các cung tròn sau thành số đo radian (chính xác đến hàng phần nghìn) $21^\circ 30'$ và $75^\circ 54'$.
 b) Đổi số đo radian của các cung tròn sau ra số đo độ (chính xác đến phút) :
 $2,5 \text{ rad}$ và $\frac{2}{\pi} \text{ rad}$ (có thể dùng máy tính bỏ túi, xem bài đọc thêm).
5. Coi kim giờ đồng hồ là tia Ou , kim phút là tia Ov . Hãy tìm số đo của các góc lượng giác (Ou, Ov) khi đồng hồ chỉ 3 giờ, chỉ 4 giờ, chỉ 9 giờ, chỉ 10 giờ.

6. Chứng minh rằng :

a) Hai góc lượng giác có cùng tia đầu và có số đo là $\frac{10\pi}{3}$ và $\frac{22\pi}{3}$ thì có cùng tia cuối ;

b) Hai góc lượng giác có cùng tia đầu và có số đo là 645° và -435° thì có cùng tia cuối.

7. Tìm số đo a° , $-180 < a \leq 180$, của góc lượng giác có cùng tia đầu và tia cuối với góc trên mỗi hình sau (h.6.8) :



Hình 6.8

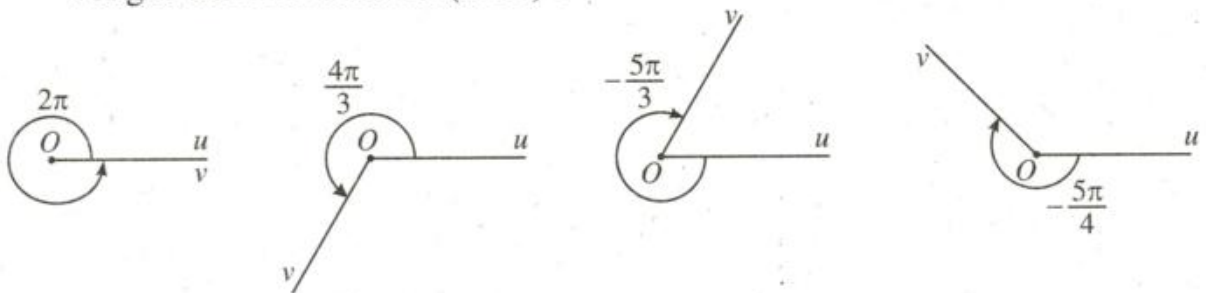
Luyện tập

8. Cho ngũ giác đều $A_0A_1A_2A_3A_4$ nội tiếp đường tròn tâm O (các đỉnh được sắp xếp theo chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ). Tính số đo (độ và radian) của các cung lượng giác $\widehat{A_0A_i}$, $\widehat{A_iA_j}$ ($i, j = 0, 1, 2, 3, 4, i \neq j$).

9. Tìm góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo dương nhỏ nhất, biết một góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo :

a) -90° ; b) 1000° ; c) $\frac{30\pi}{7}$; d) $-\frac{15\pi}{11}$.

10. Tìm số đo radian α , $-\pi < \alpha \leq \pi$, của góc lượng giác có cùng tia đầu, tia cuối với góc trên mỗi hình sau (h.6.9) :



Hình 6.9

11. Chứng minh rằng hai tia Ou và Ov vuông góc với nhau khi và chỉ khi góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo $(2k + 1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

12. Kim giờ và kim phút đồng hồ bắt đầu cùng chạy từ vị trí tia Ox chỉ số 12 (tức lúc 0 giờ). Sau khoảng thời gian t giờ (t lấy giá trị thực không âm tùy ý), kim giờ đến vị trí tia Ou , kim phút đến vị trí tia Ov .
- a) Chứng minh rằng khi quay như thế, kim giờ quét góc lượng giác (Ox, Ou) có số đo $-\frac{\pi}{6}t$, kim phút quét góc lượng giác (Ox, Ov) có số đo $-2\pi t$. Hãy tìm số đo của góc lượng giác (Ou, Ov) theo t .
- b) Chứng minh rằng hai tia Ou và Ov trùng nhau khi và chỉ khi $t = \frac{12k}{11}$ với $k = 0, 1, 2, 3, \dots$
- c) Chứng minh rằng trong vòng 12 giờ ($0 \leq t \leq 12$), hai tia Ou và Ov ở vị trí hai tia đối nhau khi và chỉ khi $t = \frac{6}{11}(2k+1)$ với $k = 0, 1, \dots, 10$.
13. Hỏi hai góc lượng giác có số đo radian $\frac{35\pi}{3}$ và $\frac{m\pi}{5}$ (m là số nguyên) có thể có cùng tia đầu, tia cuối không ?