§ 3 HÀM SỐ BẬC HAI

1. Định nghĩa

> ***Hàm số bậc hai*** *là hàm số được cho bằng biểu thức có dạng* $y = ax^2 + bx + c$*, trong đó* a, b, c *là những hằng số với* $a \neq 0$.

Tập xác định của hàm số bậc hai là $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ mà chúng ta đã học ở lớp dưới là một trường hợp riêng của hàm số bậc hai và có đồ thị là một parabol.

Trong bài này, chúng ta sẽ thấy rằng : Nếu tịnh tiến parabol $y = ax^2$ một cách thích hợp thì ta sẽ được đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$. Do đó, đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ cũng gọi là một parabol.

2. Đồ thị của hàm số bậc hai

a) Nhắc lại về đồ thị hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

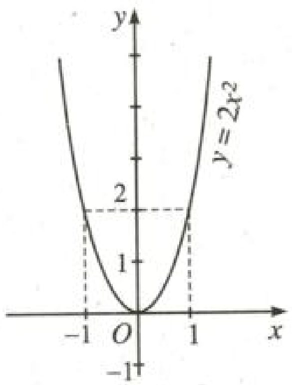
Ta đã biết, đồ thị hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ là parabol (P_0) có các đặc điểm sau :

1) Đỉnh của parabol (P_0) là gốc toạ độ O ;

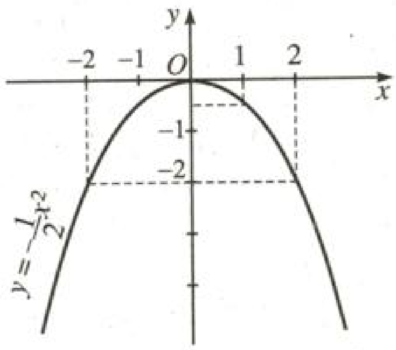
2) Parabol (P_0) có trục đối xứng là trục tung ;

3) Parabol (P_0) hướng bề lõm lên trên khi $a > 0$ và xuống dưới khi $a < 0$.

Chẳng hạn, hình 2.16 là parabol $y = 2x^2$, hình 2.17 là parabol $y = -\frac{1}{2}x^2$.



Hình 2.16



Hình 2.17

b) Đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

Ta đã biết

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c$$

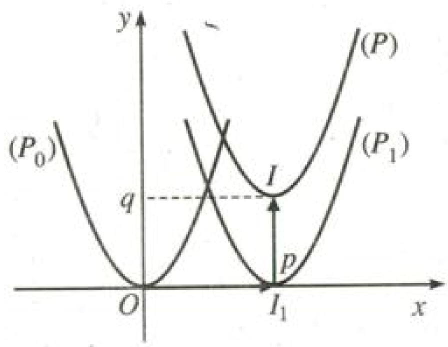
$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Do đó, nếu đặt

$$\Delta = b^2 - 4ac,\ p = -\frac{b}{2a} \text{ và } q = -\frac{\Delta}{4a}$$

thì hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có dạng $y = a(x - p)^2 + q$.

Gọi (P_0) là parabol $y = ax^2$. Ta thực hiện hai phép tịnh tiến liên tiếp như sau :



Hình 2.18

– Tịnh tiến (P_0) sang phải p đơn vị nếu $p > 0$, sang trái $|p|$ đơn vị nếu $p < 0$, ta được đồ thị hàm số $y = a(x - p)^2$. Gọi đồ thị này là (P_1).

– Tiếp theo, tịnh tiến (P_1) lên trên q đơn vị nếu $q > 0$, xuống dưới $|q|$ đơn vị nếu $q < 0$, ta được đồ thị hàm số $y = a(x - p)^2 + q$. Gọi đồ thị này là (P). Vậy (P) là đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$.

Ta nhận thấy (P_1) và (P) đều là những hình "giống hệt" parabol (P_0) (hình 2.18 ứng với trường hợp $p > 0, q > 0$).

H1 *Biết rằng trong phép tịnh tiến thứ nhất, đỉnh O của (P_0) biến thành đỉnh I_1 của (P_1). Từ đó, hãy cho biết toạ độ của I_1 và phương trình trục đối xứng của (P_1).*

H2 *Trong phép tịnh tiến thứ hai, đỉnh I_1 của (P_1) biến thành đỉnh I của (P). Tìm toạ độ của I và phương trình trục đối xứng của (P).*

Kết luận

Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ là một parabol có đỉnh $I\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$, nhận đường thẳng $x = -\dfrac{b}{2a}$ làm trục đối xứng và hướng bề lõm lên trên khi $a > 0$, xuống dưới khi $a < 0$.

Trên đây, ta đã biết đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ cũng là một parabol "giống" như parabol $y = ax^2$, chỉ khác nhau về vị trí trong mặt phẳng toạ độ. Do đó trong thực hành, ta thường *vẽ trực tiếp* parabol $y = ax^2 + bx + c$ mà không cần vẽ parabol $y = ax^2$. Cụ thể, ta làm như sau :

– Xác định đỉnh của parabol ;

– Xác định trục đối xứng và hướng bề lõm của parabol ;

– Xác định một số điểm cụ thể của parabol (chẳng hạn, giao điểm của parabol với các trục toạ độ và các điểm đối xứng với chúng qua trục đối xứng) ;

– Căn cứ vào tính đối xứng, bề lõm và hình dáng parabol để "nối" các điểm đó lại.

3. Sự biến thiên của hàm số bậc hai

Từ đồ thị của hàm số bậc hai, ta suy ra bảng biến thiên sau đây.

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$y=ax^2+bx+c$ $(a<0)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$

Như vậy :

Khi $a>0$, hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty\ ;\ -\dfrac{b}{2a}\right)$, đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{b}{2a}\ ;\ +\infty\right)$ và có giá trị nhỏ nhất là $-\dfrac{\Delta}{4a}$ khi $x=-\dfrac{b}{2a}$.

Khi $a<0$, hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty\ ;\ -\dfrac{b}{2a}\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-\dfrac{b}{2a}\ ;\ +\infty\right)$ và có giá trị lớn nhất là $-\dfrac{\Delta}{4a}$ khi $x=-\dfrac{b}{2a}$.

Ví dụ. Áp dụng kết quả trên, hãy cho biết sự biến thiên của hàm số

$$y=-x^2+4x-3.$$

Vẽ đồ thị của hàm số đó.

Giải. Ta tính được $-\dfrac{b}{2a}=2$ và $-\dfrac{\Delta}{4a}=1$.

Vậy đồ thị của hàm số $y=-x^2+4x-3$ là parabol có đỉnh $I(2\ ;\ 1)$, nhận đường thẳng $x=2$ làm trục đối xứng và hướng bề lõm xuống dưới.

Từ đó suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty\ ;\ 2)$, nghịch biến trên khoảng $(2\ ;\ +\infty)$.

Ta có bảng biến thiên :

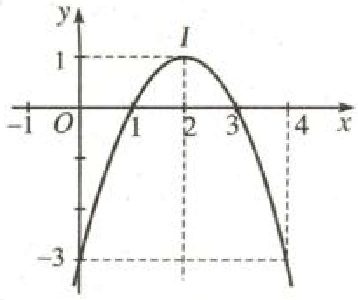
x	$-\infty$		2		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Bảng biến thiên này cho thấy hàm số có giá trị lớn nhất là 1 khi $x=2$.

Để vẽ đồ thị, tạ lập bảng toạ độ của một số điểm thuộc đồ thị như sau

x	0	1	2	3	4
y	-3	0	1	0	-3

"Nối" các điểm đó lại, ta được parabol $y = -x^2 + 4x - 3$ như hình 2.19.



Hình 2.19

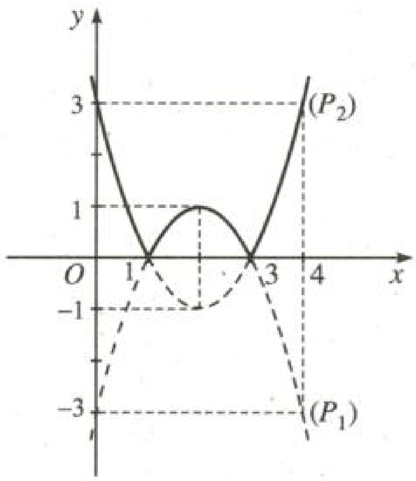
Nhận xét. Ta cũng có thể vẽ đồ thị của hàm số $y = |ax^2 + bx + c|$ tương tự như cách vẽ đồ thị của hàm số $y = |ax + b|$.

Chẳng hạn, để vẽ đồ thị hàm số $y = |-x^2 + 4x - 3|$, ta lần lượt làm như sau (h.2.20) :

• Vẽ parabol $(P_1) : y = -x^2 + 4x - 3$;

• Vẽ parabol $(P_2) : y = -(-x^2 + 4x - 3)$ bằng cách lấy đối xứng (P_1) qua trục Ox.

• Xoá đi các điểm của (P_1) và (P_2) nằm ở phía dưới trục hoành.



Hình 2.20

H3 *Cho hàm số $y = x^2 + 2x - 3$ có đồ thị là parabol (P).*

a) Tìm toạ độ đỉnh, phương trình trục đối xứng và hướng bề lõm của (P). Từ đó suy ra sự biến thiên của hàm số $y = x^2 + 2x - 3$.

b) Vẽ parabol (P).

c) Vẽ đồ thị của hàm số $y = |x^2 + 2x - 3|$.

Câu hỏi và bài tập

27. Cho các hàm số :

a) $y = -x^2 - 3$; b) $y = (x - 3)^2$;

c) $y = \sqrt{2}\,x^2 + 1$; d) $y = -\sqrt{2}\,(x + 1)^2$.

Không vẽ đồ thị, hãy mô tả đồ thị của mỗi hàm số trên bằng cách điền vào chỗ trống (...) theo mẫu :

– Đỉnh của parabol là điểm có toạ độ ...

– Parabol có trục đối xứng là đường thẳng ...

– Parabol có bề lõm hướng (lên trên / xuống dưới) ...

28. Gọi (P) là đồ thị của hàm số $y = ax^2 + c$. Tìm a và c trong mỗi trường hợp sau :

a) y nhận giá trị bằng 3 khi $x = 2$, và có giá trị nhỏ nhất là -1 ;

b) Đỉnh của parabol (P) là $I(0 ; 3)$ và một trong hai giao điểm của (P) với trục hoành là $A(-2 ; 0)$.

29. Gọi (P) là đồ thị của hàm số $y = a(x - m)^2$. Tìm a và m trong mỗi trường hợp sau :

a) Parabol (P) có đỉnh là $I(-3 ; 0)$ và cắt trục tung tại điểm $M(0 ; -5)$;

b) Đường thẳng $y = 4$ cắt (P) tại hai điểm $A(-1 ; 4)$ và $B(3 ; 4)$.

30. Viết mỗi hàm số cho sau đây thành dạng $y = a(x - p)^2 + q$. Từ đó hãy cho biết đồ thị của nó có thể được suy ra từ đồ thị của hàm số nào nhờ các phép tịnh tiến đồ thị song song với các trục toạ độ. Hãy mô tả cụ thể các phép tịnh tiến đó :

a) $y = x^2 - 8x + 12$;　　　　b) $y = -3x^2 - 12x + 9$.

31. Hàm số $y = -2x^2 - 4x + 6$ có đồ thị là parabol (P).

a) Tìm toạ độ đỉnh và phương trình trục đối xứng của (P).

b) Vẽ parabol (P).

c) Dựa vào đồ thị, hãy cho biết tập hợp các giá trị của x sao cho $y \geq 0$.

Luyện tập

32. Với mỗi hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$ và $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$, hãy

a) Vẽ đồ thị của hàm số ;

b) Tìm tập hợp các giá trị x sao cho $y > 0$;

c) Tìm tập hợp các giá trị của x sao cho $y < 0$.

33. Lập bảng theo mẫu sau đây rồi điền vào ô trống các giá trị thích hợp (nếu có).

Hàm số	Hàm số có giá trị lớn nhất / nhỏ nhất khi $x = ?$	Giá trị lớn nhất	Giá trị nhỏ nhất
$y = 3x^2 - 6x + 7$			
$y = -5x^2 - 5x + 3$			
$y = x^2 - 6x + 9$			
$y = -4x^2 + 4x - 1$			

34. Gọi (P) là đồ thị của hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$. Hãy xác định dấu của hệ số a và biệt số Δ trong mỗi trường hợp sau :

a) (P) nằm hoàn toàn ở phía trên trục hoành ;

b) (P) nằm hoàn toàn ở phía dưới trục hoành ;

c) (P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và đỉnh của (P) nằm phía trên trục hoành.

35. Vẽ đồ thị rồi lập bảng biến thiên của mỗi hàm số sau :

a) $y = \left|x^2 + \sqrt{2}x\right|$; b) $y = -x^2 + 2|x| + 3$;

c) $y = 0,5x^2 - |x - 1| + 1$.

36. Vẽ đồ thị của mỗi hàm số sau :

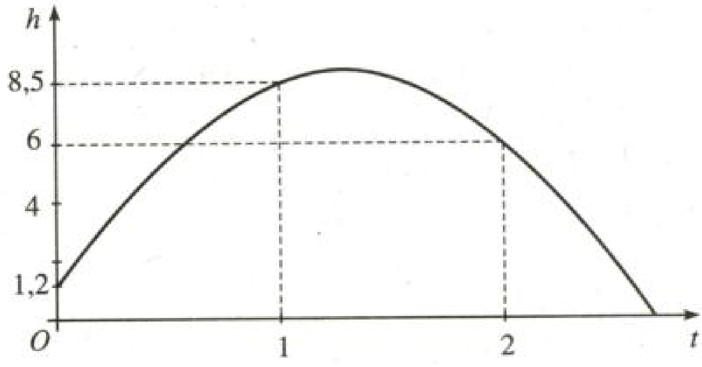
a) $y = \begin{cases} -x + 1 & \text{nếu } x \le -1 \\ -x^2 + 3 & \text{nếu } x > -1 \text{ ;} \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+3)^2 & \text{nếu } x \le -1, \\ 2 & \text{nếu } x > -1. \end{cases}$

37. *Bài toán bóng đá*

Khi một quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt đến độ cao nào đó rồi rơi xuống. Biết rằng quỹ đạo của quả bóng là một cung parabol trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oth, trong đó t là thời gian (tính bằng giây), kể từ khi quả bóng được đá lên ; h là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá từ độ cao 1,2 m. Sau đó 1 giây, nó đạt độ cao 8,5 m và 2 giây sau khi đá lên, nó ở độ cao 6 m (h.2.21).

a) Hãy tìm hàm số bậc hai biểu thị độ cao h theo thời gian t và có phần đồ thị trùng với quỹ đạo của quả bóng trong tình huống trên.

b) Xác định độ cao lớn nhất của quả bóng (tính chính xác đến hàng phần nghìn).



Hình 2.21

c) Sau bao lâu thì quả bóng sẽ chạm đất kể từ khi đá lên (tính chính xác đến hàng phần trăm) ?

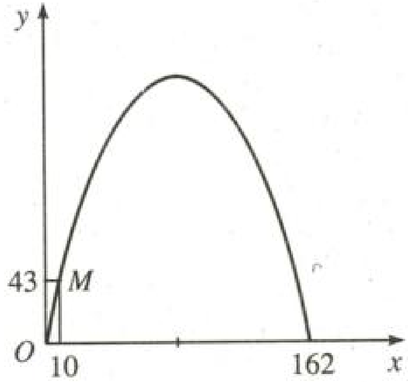
38. *Bài toán về cổng Ac-xơ (Arch)*

Khi du lịch đến thành phố Xanh Lu-i (Mĩ), ta sẽ thấy một cái cổng lớn có hình parabol hướng bề lõm xuống dưới, đó là cổng Ac-xơ. Giả sử ta lập một hệ toạ độ Oxy sao cho một chân cổng đi qua gốc O như trên hình 2.22 (x và y tính bằng mét), chân kia của cổng ở vị trí (162 ; 0). Biết một điểm M trên cổng có toạ độ là (10 ; 43).

a) Tìm hàm số bậc hai có đồ thị chứa cung parabol nói trên.

b) Tính chiều cao của cổng (tính từ điểm cao nhất trên cổng xuống mặt đất, làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Cổng Ac-xơ ở Mĩ



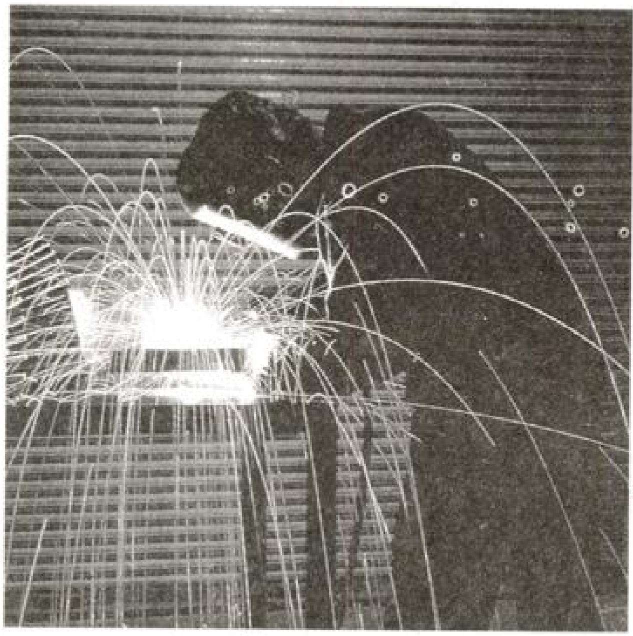
Hình 2.22

Em có biết

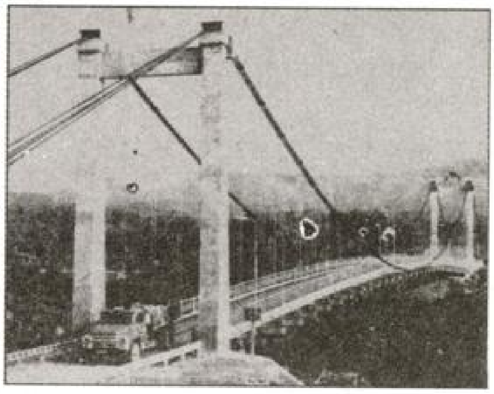
MỘT SỐ HÌNH ẢNH ĐƯỜNG PARABOL TRONG THỰC TẾ

Parabol là một đường cong đơn giản nhưng rất đẹp. Bởi vậy, chúng ta có thể thấy nó xuất hiện trong nhiều công trình kiến trúc ở Việt Nam và trên thế giới.

Ngoài ra, parabol còn có nhiều tính chất lí thú mà chúng ta sẽ nghiên cứu trong Hình học.

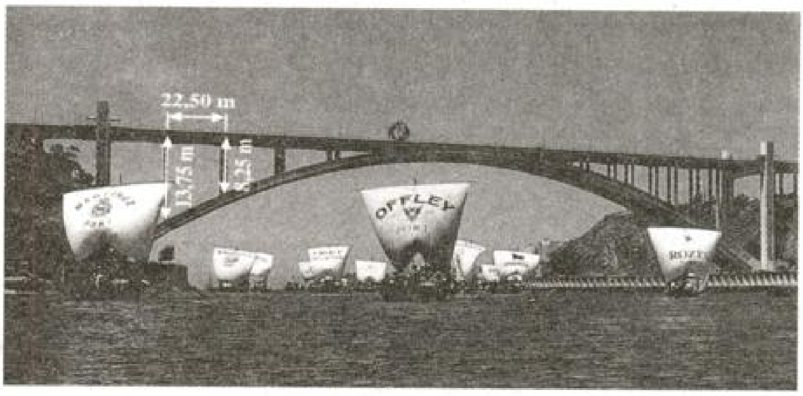


Thợ hàn.



Cầu treo Bình Thành trên tuyến quốc lộ 19 nối thành phố Huế với huyện miền núi A-lưới. Ảnh VNTTX.

Bể phun nước ở Tuần Châu, tỉnh Quảng Ninh.



Cầu A-ra-bi-đa ở Poóc-tô Bồ Đào Nha.