

§ 2

HÀM SỐ BẬC NHẤT

1. Nhắc lại về hàm số bậc nhất

- Ta đã biết : **Hàm số bậc nhất** là hàm số được cho bằng biểu thức có dạng $y = ax + b$, trong đó a và b là những hằng số với $a \neq 0$.

Hàm số bậc nhất có tập xác định là \mathbb{R} .

Khi $a > 0$, hàm số $y = ax + b$ đồng biến trên \mathbb{R} .

Khi $a < 0$, hàm số $y = ax + b$ nghịch biến trên \mathbb{R} .

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	$+\infty$
$y = ax + b$		$\nearrow +\infty$
$(a > 0)$	$-\infty$	
x	$-\infty$	$+\infty$
$y = ax + b$	$+\infty$	$\searrow -\infty$
$(a < 0)$		

Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$) là một đường thẳng gọi là đường thẳng $y = ax + b$. Nó có *hệ số góc* bằng a và có đặc điểm sau :

– Không song song và không trùng với các trục tọa độ ;

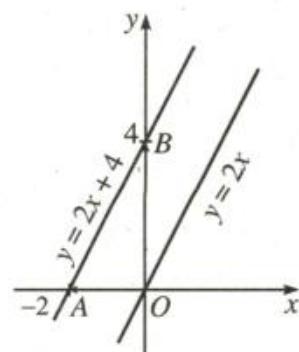
– Cắt trục tung tại điểm $B(0 ; b)$ và cắt trục hoành tại điểm $A(-\frac{b}{a} ; 0)$.

Ví dụ 1. Đồ thị của hàm số $y = 2x + 4$ là đường thẳng đi qua hai điểm $A(-2 ; 0)$ và $B(0 ; 4)$.

Từ đẳng thức $2x + 4 = 2(x + 2)$ dễ suy ra rằng đường thẳng $y = 2x + 4$ có thể thu được từ đường thẳng (d) : $y = 2x$ bằng một trong hai cách sau (h. 2.11) :

– Tịnh tiến (d) lên trên 4 đơn vị ;

– Tịnh tiến (d) sang trái 2 đơn vị.



Hình 2.11

• Cho hai đường thẳng (d) : $y = ax + b$ và (d') : $y = a'x + b'$, ta có :

(d) song song với (d') $\Leftrightarrow a = a'$ và $b \neq b'$;

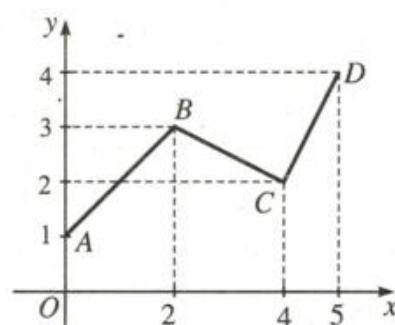
(d) trùng với (d') $\Leftrightarrow a = a'$ và $b = b'$;

(d) cắt (d') $\Leftrightarrow a \neq a'$.

2. Hàm số $y = |ax + b|$

a) Hàm số bậc nhất trên từng khoảng

Xét hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{nếu } 0 \leq x < 2 \\ -\frac{1}{2}x+4 & \text{nếu } 2 \leq x \leq 4 \\ 2x-6 & \text{nếu } 4 < x \leq 5. \end{cases}$



Hình 2.12

Rõ ràng, hàm số trên không phải là hàm số bậc nhất. Nó là sự "lắp ghép" của ba hàm số bậc nhất khác nhau. Hàm số này là một ví dụ về *hàm số bậc nhất trên từng khoảng*.

Muốn vẽ đồ thị của hàm số bậc nhất trên từng khoảng, ta vẽ đồ thị của từng hàm số tạo thành. Chẳng hạn, đồ thị của hàm số nêu trên là đường gấp khúc $ABCD$ (h.2.12), trong đó :

AB là phần đường thẳng $y = x + 1$ ứng với $0 \leq x < 2$;

BC là phần đường thẳng $y = -\frac{1}{2}x + 4$ ứng với $2 \leq x \leq 4$;

CD là phần đường thẳng $y = 2x - 6$ ứng với $4 < x \leq 5$.

H1 Cho biết tập xác định, lập bảng biến thiên của hàm số nói trên và tìm giá trị lớn nhất của nó.

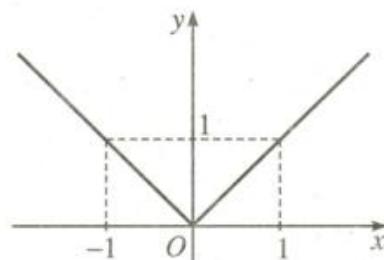
b) Đồ thị và sự biến thiên của hàm số $y = |ax + b|$ với $a \neq 0$

Sau đây, ta sẽ tìm hiểu tính chất của các hàm số dạng $y = |ax + b|$ thông qua đồ thị của nó. Hàm số $y = |ax + b|$ về thực chất cũng là hàm số bậc nhất trên từng khoảng.

Ví dụ 2. Xét hàm số $y = |x|$.

Dễ thấy hàm số $y = |x|$ xác định với mọi x và là một hàm số chẵn. Theo định nghĩa giá trị tuyệt đối, ta có

$$|x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$



Hình 2.13

Do đó, đồ thị của hàm số này là sự "lắp ghép" của hai đồ thị : đồ thị của hàm số $y = x$ (chỉ lấy phần ứng với $x \geq 0$) và đồ thị của hàm số $y = -x$ (chỉ lấy phần ứng với $x < 0$). Đó là hai tia phan giác của hai góc phần tư I và II (h.2.13). Dễ thấy chúng đối xứng với nhau qua Oy . \square

H2 Dựa vào đồ thị, hãy lập bảng biến thiên của hàm số $y = |x|$ và tìm giá trị nhỏ nhất của nó.

Ví dụ 3. Xét hàm số $y = |2x - 4|$.

Theo định nghĩa giá trị tuyệt đối, ta có :

- Nếu $2x - 4 \geq 0$, tức là $x \geq 2$ thì $|2x - 4| = 2x - 4$;
- Nếu $2x - 4 < 0$, tức là $x < 2$ thì $|2x - 4| = -(2x - 4) = -2x + 4$.

Do đó, hàm số đã cho có thể viết là

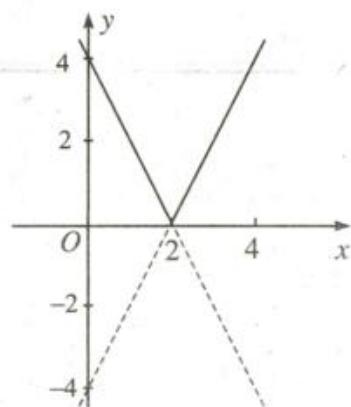
$$y = \begin{cases} 2x - 4 & \text{nếu } x \geq 2 \\ -2x + 4 & \text{nếu } x < 2. \end{cases}$$

□

H3 Hãy nêu cách vẽ đồ thị của hàm số cho trong ví dụ 3 rồi lập bảng biến thiên của nó.

CHÚ Ý

Qua hai ví dụ trên đây, ta thấy có thể vẽ đồ thị của hàm số $y = |ax + b|$ bằng một cách khác đơn giản hơn như sau : Vẽ hai đường thẳng $y = ax + b$ và $y = -ax - b$ rồi xoá đi hai phần đường thẳng nằm ở phía dưới trục hoành. (Hình 2.14 là đồ thị của hàm số cho trong ví dụ 3).



Hình 2.14

Câu hỏi và bài tập

Hàm số bậc nhất

17. Tìm các cặp đường thẳng song song trong các đường thẳng sau :

a) $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x + 1$;

b) $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + 3$;

c) $y = \frac{2}{\sqrt{2}}x + 2$;

d) $y = \sqrt{2}x - 2$;

e) $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x - 1$;

g) $y = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - 1\right)$.

Hàm số $y = |ax + b|$

18. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{nếu } -2 \leq x < -1 \\ -2x & \text{nếu } -1 \leq x \leq 1 \\ x - 3 & \text{nếu } 1 < x \leq 3. \end{cases}$

a) Tìm tập xác định và vẽ đồ thị của hàm số đó.

b) Cho biết sự biến thiên của hàm số đã cho trên mỗi khoảng $(-2 ; -1)$, $(-1 ; 1)$ và $(1 ; 3)$ và lập bảng biến thiên của nó.

19. a) Vẽ đồ thị của hai hàm số $y = f_1(x) = 2|x|$ và $y = f_2(x) = |2x + 5|$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

b) Cho biết phép tịnh tiến biến đổi đồ thị hàm số f_1 thành đồ thị hàm số f_2 .

Bài đọc thêm

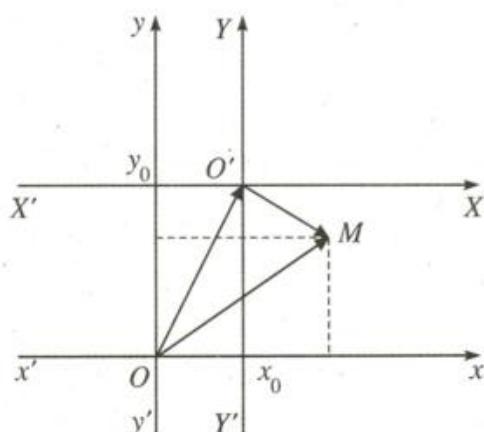
PHÉP TỊNH TIẾN HỆ TOA ĐỘ

Ta biết rằng đồ thị của một hàm số bao giờ cũng gắn với một hệ toạ độ nhất định. Ví dụ, đồ thị của hàm số $y = x$ là đường phân giác (d) của góc phần tư I và III trong hệ toạ độ Oxy . Ta hãy xét một hệ toạ độ mới $O'XY$, trong đó gốc O' của nó, đối với hệ toạ độ Oxy , có toạ độ $(x_0 ; y_0)$; các trục $X'X$ và $Y'Y$ song song cùng hướng và cùng đơn vị theo thứ tự với trục $x'x$ và $y'y$ (h.2.15). Câu hỏi đặt ra là trong hệ toạ độ mới ấy, liệu (d) có còn là đồ thị của hàm số $Y = X$ nữa hay không? Nếu không thì nó sẽ là đồ thị của hàm số nào?

Có thể thấy rằng: Nếu $O' \notin (d)$, có nghĩa là (d) không đi qua gốc toạ độ mới thì (d) không thể là đồ thị của hàm số $Y = X$. Tuy nhiên, trong trường hợp tổng quát, muốn biết (d) là đồ thị của hàm số nào, ta cần tìm hiểu mối quan hệ giữa các toạ độ cũ và mới của mỗi điểm trong mặt phẳng.

Gọi M là một điểm tùy ý. Đối với hệ toạ độ Oxy , M có toạ độ là $(x ; y)$. Đối với hệ toạ độ $O'XY$, toạ độ của M là $(X ; Y)$. Ta cần tìm mối quan hệ giữa $(x ; y)$ và $(X ; Y)$. Để ý

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}.$$



Hình 2.15

Về toạ độ, từ đẳng thức vectơ ở trên, ta có

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0. \end{cases} \quad (*)$$

Đó là công thức đổi toạ độ bởi phép tịnh tiến hệ toạ độ theo vectơ $\overrightarrow{OO'}$.

Giả sử (G) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ đổi với hệ toạ độ Oxy . Muốn biết (G) là đồ thị của hàm số nào đổi với hệ toạ độ $O'XY$, ta phải tìm quan hệ giữa X và Y . Muốn vậy, thay thế x và y trong hệ thức $y = f(x)$ bởi công thức $(*)$, ta có

$$Y + y_0 = f(X + x_0) \text{ hay } Y = f(X + x_0) - y_0.$$

Vậy đổi với hệ toạ độ $O'XY$, (G) là đồ thị của hàm số $Y = f(X + x_0) - y_0$.

Luyện tập

20. Có phải mỗi đường thẳng trong mặt phẳng toạ độ đều là đồ thị của một hàm số nào đó không ? Vì sao ?
21. a) Tìm hàm số $y = f(x)$, biết rằng đồ thị của nó là đường thẳng đi qua điểm $(-2; 5)$ và có hệ số góc bằng $-1,5$;
b) Vẽ đồ thị của hàm số tìm được.
22. Tìm bốn hàm số bậc nhất có đồ thị là bốn đường thẳng đôi một cắt nhau tại bốn đỉnh của một hình vuông nhận gốc O làm tâm đối xứng, biết rằng một đỉnh của hình vuông này là $A(3; 0)$.
23. Gọi (G) là đồ thị của hàm số $y = 2|x|$.
 - a) Khi tịnh tiến (G) lên trên 3 đơn vị, ta được đồ thị của hàm số nào ?
 - b) Khi tịnh tiến (G) sang trái 1 đơn vị, ta được đồ thị của hàm số nào ?
 - c) Khi tịnh tiến liên tiếp (G) sang phải 2 đơn vị, rồi xuống dưới 1 đơn vị, ta được đồ thị của hàm số nào ?
24. Vẽ đồ thị của hai hàm số sau trên cùng một mặt phẳng toạ độ và nêu nhận xét về quan hệ giữa chúng :
 - a) $y = |x - 2|$;
 - b) $y = |x| - 3$.

25. Một hãng taxi quy định giá thuê xe đi mỗi kilômét là 6 nghìn đồng đối với 10 km đầu tiên và 2,5 nghìn đồng đối với các kilômét tiếp theo. Một hành khách thuê taxi đi quãng đường x kilômét phải trả số tiền là y nghìn đồng. Khi đó, y là một hàm số của đối số x , xác định với mọi $x \geq 0$.
- Hãy biểu diễn y như một hàm số bậc nhất trên từng khoảng ứng với đoạn $[0 ; 10]$ và khoảng $(10 ; +\infty)$.
 - Tính $f(8), f(10)$ và $f(18)$.
 - Vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và lập bảng biến thiên của nó.
26. Cho hàm số $y = 3|x - 1| - |2x + 2|$.
- Bằng cách bỏ dấu giá trị tuyệt đối, hãy viết hàm số đã cho dưới dạng hàm số bậc nhất trên từng khoảng. (*Hướng dẫn*. Xét các khoảng hay đoạn $(-\infty ; -1)$, $[-1 ; 1]$ và $[1 ; +\infty)$).
 - Vẽ đồ thị rồi lập bảng biến thiên của hàm số đã cho.