# § 4 MỘT SỐ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

## 1. Công thức cộng

### a) Công thức cộng đối với sin và côsin

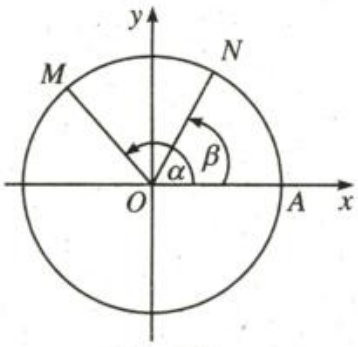
Với mọi góc lượng giác $\alpha$, $\beta$, ta có

$$\boxed{\begin{aligned}
&\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\\
&\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\
&\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\\
&\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.
\end{aligned}}$$

*Chứng minh*

1) Giả sử các điểm $M$ và $N$ trên đường tròn lượng giác theo thứ tự xác định bởi $\alpha$ và $\beta$ (h.6.25) thì $\overrightarrow{OM}$ có toạ độ $(\cos\alpha\ ;\ \sin\alpha)$, $\overrightarrow{ON}$ có toạ độ $(\cos\beta; \sin\beta)$ và tích vô hướng

$\overrightarrow{OM}\,.\,\overrightarrow{ON} = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$



*Hình 6.25*

Mặt khác

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = |\overrightarrow{OM}|.|\overrightarrow{ON}|\cos\widehat{NOM} = \cos\widehat{NOM},$$

mà đã biết

$$\cos\widehat{NOM} = \cos(ON, OM) = \cos[(OA, OM) - (OA, ON)] = \cos(\alpha - \beta)$$

nên suy ra

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

2) Từ 1) ta suy ra

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos[\alpha - (-\beta)] = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta)$$
$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

3) Ta có

$$\sin(\alpha - \beta) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \beta\right]$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

4) Ta có

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin[\alpha - (-\beta)] = \sin\alpha\cos(-\beta) - \cos\alpha\sin(-\beta)$$
$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

**Ví dụ 1.** $\cos\frac{11\pi}{12} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right) = -\cos\frac{\pi}{12}$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = -\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= -\left(\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{4}\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right).$$ □

**H1** *Hãy kiểm nghiệm lại các công thức cộng nói trên với $\alpha$ tuỳ ý và*

*a)* $\beta = \pi$ ; *b)* $\beta = \frac{\pi}{2}$.

**b) Công thức cộng đối với tang**

Ta có

$$\boxed{\begin{aligned}\tan(\alpha-\beta) &= \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\\ \tan(\alpha+\beta) &= \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}.\end{aligned}}$$

với mọi $\alpha$, $\beta$ làm cho các biểu thức có nghĩa.

Thực vậy

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta},$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\tan[\alpha-(-\beta)]=\frac{\tan\alpha-\tan(-\beta)}{1+\tan\alpha\tan(-\beta)}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}.$$

**Ví dụ 2.** $\tan\frac{\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}.$ □

**H2** *Để các biểu thức ở công thức* $\tan(\alpha+\beta)$ *nói trên có nghĩa, điều kiện của* $\alpha$, $\beta$ *là các góc* $\alpha$, $\beta$, $\alpha+\beta$ *không có dạng* $\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$. *Điều đó có đúng không ?*

## 2. Công thức nhân đôi

Trong các công thức cộng nói trên, đặt $\alpha=\beta$ thì được các công thức sau đây gọi là các *công thức nhân đôi*.

$$\boxed{\begin{aligned}\cos2\alpha &= \cos^2\alpha-\sin^2\alpha\\ \sin2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha\\ \tan2\alpha &= \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.\end{aligned}}$$

(Trong công thức cuối $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $\alpha\neq\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$).

**Ví dụ 3**

a) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$ ;

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$.

b) Với $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$ thì $\cos 2\alpha \neq 0$ và ta có

$$\frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

$$= \frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{(\cos\alpha - \sin\alpha)(\cos\alpha + \sin\alpha)} = \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}.$$ □

CHÚ Ý

Từ trên ta suy ra

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \ ; \ \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

Các công thức này gọi là các ***công thức hạ bậc***. (Chúng cho phép biến đổi các biểu thức của $\cos^2\alpha$, $\sin^2\alpha$ thành biểu thức của $\cos 2\alpha$).

**Ví dụ 4.** Tính côsin, sin, tang của góc $\frac{\pi}{12}$.

*Giải*. Ta có $\cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{1 + \cos\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$ nên $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$ ;

$\sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{1 - \cos\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$ nên $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$ ;

$\tan\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} = 2 - \sqrt{3}$. □

**H3** *Hãy tính* $\cos 4\alpha$ *theo* $\cos\alpha$.

**H4** *Đơn giản biểu thức*

$$\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha.$$

## 3. Công thức biến đổi tích thành tổng và biến đổi tổng thành tích

### a) Công thức biến đổi tích thành tổng

Sử dụng công thức cộng, ta dễ dàng suy ra các công thức sau đây gọi là ***công thức biến đổi tích thành tổng.***

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right].$$

**Ví dụ 5.** Tính $\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{\pi}{24}$.

*Giải.* Ta có $\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{\pi}{24} = -\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi}{24}\right)-\cos\left(\frac{5\pi}{24}-\frac{\pi}{24}\right)\right]$

$$= -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right).$$ □

**H5** *Hãy tính* $\cos\frac{7\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12}$.

### b) Công thức biến đổi tổng thành tích

Trong các công thức biến đổi tích thành tổng trên đây, nếu đặt $\alpha+\beta = x$, $\alpha-\beta = y$ $\left(\text{tức là } \alpha = \frac{x+y}{2}, \beta = \frac{x-y}{2}\right)$ thì ta suy ra được các công thức sau đây gọi là ***công thức biến đổi tổng thành tích***.

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

**Ví dụ 6.** Chứng minh rằng $\dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{10}} - \dfrac{1}{\sin\dfrac{3\pi}{10}} = 2$.

*Giải*. Ta có

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{10}} - \frac{1}{\sin\frac{3\pi}{10}} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}}\left(\sin\frac{3\pi}{10} - \sin\frac{\pi}{10}\right)$$

$$= \frac{1}{\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}} 2\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{10}+\frac{\pi}{10}}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{10}-\frac{\pi}{10}}{2}\right) = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}} 2\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{10}$$

$$= 2\frac{\cos\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{3\pi}{10}} = 2, \left(\text{do } \cos\frac{\pi}{5} = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right) = \sin\frac{3\pi}{10}\right).$$

## Câu hỏi và bài tập

**38.** Hỏi mỗi khẳng định sau có đúng không ?

Với mọi $\alpha$, $\beta$, ta có

a) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha + \cos\beta$;  b) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha - \sin\beta$;

c) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$;  d) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$;

e) $\dfrac{\sin 4\alpha}{\cos 2\alpha} = \tan 2\alpha$ (khi các biểu thức có nghĩa) ;

g) $\sin^2\alpha = \sin 2\alpha$.

**39.** Sử dụng $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$, hãy tính các giá trị lượng giác của góc $75^\circ$.

Sử dụng $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$, hãy tính các giá trị lượng giác của góc $15^\circ$ (đối chiếu với kết quả bài tập 29).

**40.** Chứng minh rằng :

a) $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right)$ ;

b) $\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)$ ;

c) $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$ $\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \alpha\neq\frac{3\pi}{4}+k\pi\right)$ ;

d) $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$ $\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \alpha\neq\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$.

**41.** a) Biết $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ và $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$, hãy tính các giá trị lượng giác của góc $2\alpha$ và góc $\frac{\alpha}{2}$.

b) Sử dụng $15^{\circ}=\frac{30^{\circ}}{2}$, hãy kiểm nghiệm lại kết quả của bài tập 39.

**42.** Chứng minh rằng :

a) $\sin\frac{11\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{4}(2-\sqrt{3})$;

b) $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}=-\frac{1}{8}$. (*Hướng dẫn*. Nhân hai vế với $\sin\frac{\pi}{7}$) ;

c) $\sin 6^{\circ}\sin 42^{\circ}\sin 66^{\circ}\sin 78^{\circ}=\frac{1}{16}$. (*Hướng dẫn*. Nhân hai vế với $\cos 6^{\circ}$).

**43.** Dùng công thức biến đổi tích thành tổng, chứng minh :

a) $\cos 75^{\circ}\cos 15^{\circ}=\sin 75^{\circ}\sin 15^{\circ}=\frac{1}{4}$ ;

b) $\cos 75^{\circ}\sin 15^{\circ}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$ ;

c) $\sin 75^{\circ}\cos 15^{\circ}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$ ;

d) $\cos\alpha\sin(\beta-\gamma)+\cos\beta\sin(\gamma-\alpha)+\cos\gamma\sin(\alpha-\beta)=0$, với mọi $\alpha,\beta,\gamma$.

**44.** Đơn giản các biểu thức sau :

a) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$ ; b) $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

**45.** Chứng minh rằng :

a) $\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}=-\sqrt{3}$ nếu $\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$ và $\cos\alpha\neq\cos\beta$ ;

b) $\frac{\cos\alpha-\cos 7\alpha}{\sin 7\alpha-\sin\alpha}=\tan 4\alpha$ (khi các biểu thức có nghĩa).



15b - ĐS10NC

## Luyện tập

**46.** Chứng minh rằng :

a) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ ; $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ ;

b) $\sin\alpha \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \frac{1}{4}\sin 3\alpha$ ;

$\cos\alpha \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \frac{1}{4}\cos 3\alpha$ .

*Ứng dụng*. Tính $\sin 20^o \sin 40^o \sin 80^o$ và $\tan 20^o \tan 40^o \tan 80^o$.

**47.** Chứng minh rồi dùng máy tính bỏ túi hoặc bảng số để kiểm nghiệm lại gần đúng kết quả :

a) $\cos 10^o \cos 50^o \cos 70^o = \sin 20^o \sin 40^o \sin 80^o = \frac{\sqrt{3}}{8}$ ;

b) $\sin 10^o \sin 50^o \sin 70^o = \cos 20^o \cos 40^o \cos 80^o = \frac{1}{8}$.

**48.** Chứng minh rằng

$$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}.$$

*Hướng dẫn*. Nhân vế trái với $\sin\frac{\pi}{7}$ ( hoặc $\sin\frac{2\pi}{7}$) rồi sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng.

**49.** Chứng minh rằng, giá trị mỗi biểu thức sau không phụ thuộc vào $x$ :

a) $\cos^2(\alpha + x) + \cos^2 x - 2\cos\alpha \cos x \cos(\alpha + x)$ ;

b) $\sin 4x \sin 10x - \sin 11x \sin 3x - \sin 7x \sin x$.

**50.** Chứng minh rằng :

a) Nếu tam giác $ABC$ có ba góc $A$, $B$, $C$ thoả mãn $\sin A = \cos B + \cos C$ thì tam giác $ABC$ vuông ;

b) Nếu tam giác $ABC$ có ba góc $A$, $B$, $C$ thoả mãn $\sin A = 2\sin B\cos C$ thì tam giác $ABC$ cân.

**51.** Chứng minh rằng nếu $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ thì :

a) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$ ;

b) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$ ;

c) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ ;

d) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

**52.** a) Chứng minh rằng nếu $\alpha$ và $\beta$ khác $\frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ thì

$$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \text{ và } \tan\alpha - \tan\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

b) Chứng minh rằng với $\alpha$ mà $\cos k\alpha \neq 0$ $(k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ và $\sin\alpha \neq 0$ thì

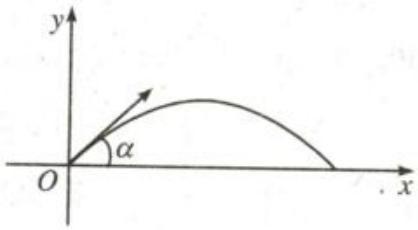
$$\frac{1}{\cos\alpha\cos 2\alpha} + \frac{1}{\cos 2\alpha\cos 3\alpha} + \ldots + \frac{1}{\cos 7\alpha\cos 8\alpha} = \frac{\tan 8\alpha - \tan\alpha}{\sin\alpha}.$$

**53.** Biết $\cos\alpha + \cos\beta = a$, $\sin\alpha + \sin\beta = b$ ($a$, $b$ là các hằng số và $a^2 + b^2 \neq 0$), hãy tính $\sin(\alpha + \beta)$ theo $a$ và $b$.

**54.** Quỹ đạo của một vật được ném lên từ gốc $O$, với vận tốc ban đầu là $v$ (m/s), theo phương hợp với trục hoành $Ox$ một góc $\alpha$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, là parabol có phương trình

$$y = -\frac{g}{2v^2\cos^2\alpha}x^2 + (\tan\alpha)x,$$

trong đó $g$ là gia tốc trọng trường ($g \approx 9{,}8$ m/s$^2$) (giả sử lực cản của không khí không đáng kể). Gọi *tầm xa* của quỹ đạo là khoảng cách từ $O$ đến giao điểm khác $O$ của quỹ đạo với trục $Ox$ (h.6.26).



*Hình 6.26*

a) Tính tầm xa theo $\alpha$ (và $v$).

b) Khi $v$ không đổi, $\alpha$ thay đổi trong khoảng $\left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$, hỏi với giá trị $\alpha$ nào thì tầm xa của quỹ đạo đạt giá trị lớn nhất ? Tính giá trị lớn nhất đó theo $v$. Khi $v = 80$ m/s, hãy tính giá trị lớn nhất đó (chính xác đến hàng đơn vị).

Em có biết

## LƯỢNG GIÁC VÀ NHÀ TOÁN HỌC Ơ-LE

Lê-ô-na Ơ-le
(*Leonhard Euler*, 1707 – 1783)

Như mọi khoa học khác, Lượng giác phát sinh từ nhu cầu của đời sống : Ngành Hàng hải đòi hỏi phải biết xác định vị trí của tàu bè ngoài biển khơi, vị trí của các hành tinh, của các vì sao ; cuộc sống xã hội với các hoạt động sản xuất đòi hỏi đo đạc ruộng đất, thiết lập bản đồ... . Các nhu cầu đó làm cho môn Lượng giác phát sinh và phát triển. Thời cổ, các nhà toán học Hi Lạp đã góp phần đáng kể vào việc phát triển môn Lượng giác. Lê-ô-na Ơ-le là người đã xây dựng lí thuyết sâu sắc về lượng giác trong cuốn "Mở đầu về giải tích các đại lượng vô cùng bé" xuất bản năm 1748. Trong công trình đó, Ơ-le đã đề cập khái niệm rađian, nhưng từ "rađian" (gắn với từ "radius" có nghĩa là bán kính) mãi đến năm 1873 mới được dùng chính thức lần đầu tiên ở Đại học Ben-phát (Belfast), Bắc Ai-len.

Ơ-le là một trong những nhà toán học lớn nhất từ xưa đến nay. Ông sinh tại Ba-lơ, Thuỵ Sĩ. Ông đã tiến hành nghiên cứu nhiều đề tài khoa học thuộc nhiều lĩnh vực khác nhau như cơ học, âm nhạc, thiên văn... Hầu hết mọi ngành toán học đều mang dấu ấn các kết quả nghiên cứu của ông. Ơ-le là người say mê, cần cù trong công việc. Cuối đời dù bị mù cả hai mắt, ông vẫn tiếp tục hoạt động sáng tạo. Trong cuộc đời mình, Ơ-le đã viết trên 800 công trình khoa học. Số công trình của ông ít ai sánh kịp.