§ 3 MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HOẶC BẬC HAI

1. Phương trình dạng $|ax + b| = |cx + d|$

a) ***Cách giải 1***

Chúng ta đã biết $|X| = |Y| \Leftrightarrow X = \pm Y$ (với X và Y là hai số tuỳ ý). Tương tự, ta có

$$|ax + b| = |cx + d| \Leftrightarrow ax + b = \pm(cx + d).$$

Như vậy, muốn giải phương trình $|ax + b| = |cx + d|$, ta chỉ việc giải hai phương trình $ax + b = cx + d$ và $ax + b = -(cx + d)$ rồi lấy tất cả các nghiệm thu được.

Ví dụ 1. Giải và biện luận phương trình

$$|mx - 2| = |x + m|. \quad (1)$$

Hướng dẫn. Để giải phương trình (1), ta phải giải hai phương trình :

$$mx - 2 = x + m\ ; \quad (1a)$$

$$mx - 2 = -(x + m). \quad (1b)$$

Ta có (1a) $\Leftrightarrow (m - 1)x = m + 2$.

Do đó, (1a) vô nghiệm khi $m = 1$ và có nghiệm $x = \dfrac{m+2}{m-1}$ khi $m \neq 1$.

Ta có (1b) $\Leftrightarrow$ $(m + 1)x = -m + 2$.

Do đó, (1b) vô nghiệm khi $m = -1$ và có nghiệm $x = \dfrac{-m+2}{m+1}$ khi $m \neq -1$.

Để kết luận về nghiệm của phương trình đã cho, ta lập bảng sau đây.

	Nghiệm của (1a)	*Nghiệm của* (1b)	*Nghiệm của* (1)
$m = 1$	vô nghiệm	$\dfrac{-m+2}{m+1} = \dfrac{1}{2}$	
$m = -1$	$\dfrac{m+2}{m-1} = -\dfrac{1}{2}$	vô nghiệm	
$m \neq \pm 1$	$\dfrac{m+2}{m-1}$	$\dfrac{-m+2}{m+1}$	

H1 *Điền vào cột cuối trong bảng trên rồi phát biểu kết luận về nghiệm của phương trình (1).*

b) ***Cách giải 2***

Do hai vế của phương trình $|ax + b| = |cx + d|$ luôn không âm nên khi bình phương hai vế của nó, ta được phương trình tương đương. Như vậy, có thể giải phương trình nêu ở ví dụ 1 như sau

$$(1) \Leftrightarrow (mx - 2)^2 = (x + m)^2 \Leftrightarrow (m^2 - 1)x^2 - 6mx + 4 - m^2 = 0.$$

H2 *Giải tiếp phương trình trên bằng cách xét các trường hợp $m = -1$, $m = 1$ và $m \neq \pm 1$ rồi so sánh với kết quả thu được từ cách 1.*

2. Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Khi giải phương trình chứa ẩn ở mẫu thức, ta phải chú ý đến điều kiện xác định của phương trình.

Ví dụ 2. Giải và biện luận phương trình

$$\frac{mx+1}{x-1} = 2. \qquad (2)$$

Giải. Điều kiện của phương trình là $x - 1 \neq 0$, tức là $x \neq 1$. Với điều kiện đó, ta có

$$(2) \quad \Leftrightarrow mx + 1 = 2(x - 1)$$

$$\Leftrightarrow (m - 2)x = -3. \qquad (2a)$$

1) Với $m \neq 2$, ta có $m - 2 \neq 0$. Phương trình (2a) có nghiệm $x = \dfrac{-3}{m-2}$. Giá trị này là nghiệm của (2) nếu nó thoả mãn điều kiện $x \neq 1$. Ta có

$$\frac{-3}{m-2} \neq 1 \Leftrightarrow -3 \neq m - 2 \Leftrightarrow m \neq -1.$$

Do đó :

Khi $m \neq 2$ và $m \neq -1$ thì $x = \dfrac{-3}{m-2}$ là nghiệm của (2) ;

Khi $m = -1$ thì giá trị $x = \dfrac{-3}{m-2}$ bị loại. Phương trình (2) vô nghiệm.

2) Với $m = 2$, phương trình (2a) trở thành $0x = -3$. Phương trình này vô nghiệm nên phương trình (2) vô nghiệm.

Kết luận

Khi $m \neq -1$ và $m \neq 2$, phương trình (2) có nghiệm $x = \dfrac{-3}{m-2}$.

Khi $m = -1$ hoặc $m = 2$, phương trình (2) vô nghiệm. □

Ví dụ 3. Giải và biện luận phương trình

$$\frac{x^2 - 2(m+1)x + 6m - 2}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{x-2}. \qquad (3)$$

Giải. Điều kiện của phương trình là $x - 2 > 0$, hay $x > 2$. Với điều kiện đó, ta có

$$(3) \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2(m+1)x + 6m - 2}{\sqrt{x-2}} = \frac{x-2}{\sqrt{x-2}}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (2m+3)x + 6m = 0. \qquad (3a)$$

Phương trình (3a) luôn có hai nghiệm là $x = 3$ và $x = 2m$.

– Giá trị $x = 3$ thoả mãn điều kiện $x > 2$ nên nó là nghiệm của phương trình (3) với mọi m.

– Để giá trị $x = 2m$ là nghiệm của (3), nó phải thoả mãn điều kiện $x > 2$. Ta có $2m > 2 \Leftrightarrow m > 1$. Điều đó có nghĩa là :

– Nếu $m > 1$ thì $x = 2m$ là nghiệm của (3) ;

– Nếu $m \leq 1$ thì $x = 2m$ không thoả mãn điều kiện của ẩn và bị loại.

Tổng hợp các kết quả trên, ta đi đến kết luận :

Khi $m > 1$, phương trình (3) có hai nghiệm $x = 3$ và $x = 2m$;

(hai nghiệm này trùng nhau khi $m = \frac{3}{2}$).

Khi $m \leq 1$, phương trình (3) có một nghiệm duy nhất $x = 3$. □

H3 *Hãy chọn phương án trả lời đúng trong các phương án cho sau đây.*

Với giá trị nào của tham số a thì phương trình $(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x - a} = 0$ có hai nghiệm phân biệt ?

(A) $a < -3$; (B) $-3 \leq a < -1$;

(C) $a \geq -1$; (D) *Không có giá trị nào của a.*

Câu hỏi và bài tập

22. Giải các phương trình :

a) $\frac{2(x^2 - 1)}{2x + 1} = 2 - \frac{x + 2}{2x + 1}$; b) $\frac{2x - 5}{x - 1} = \frac{5x - 3}{3x + 5}$.

23. Giải phương trình $\frac{m - 3}{x - 4} = m^2 - m - 6$ trong mỗi trường hợp sau :

a) $m = 3$; b) $m \neq 3$.

24. Giải và biện luận các phương trình (a và m là những tham số) :

a) $|2ax + 3| = 5$; b) $\frac{2mx - m^2 + m - 2}{x^2 - 1} = 1$.

Luyện tập

25. Giải và biện luận các phương trình (m, a và k là những tham số) :

a) $|mx - x + 1| = |x + 2|$;

b) $\dfrac{a}{x-2} + \dfrac{1}{x-2a} = 1$;

c) $\dfrac{mx - m - 3}{x+1} = 1$;

d) $\dfrac{3x+k}{x-3} = \dfrac{x-k}{x+3}$.

26. Giải và biện luận các phương trình sau (m và a là những tham số):

a) $(2x + m - 4)(2mx - x + m) = 0$;

b) $|mx + 2x - 1| = |x|$;

c) $(mx + 1)\sqrt{x-1} = 0$;

d) $\dfrac{2a-1}{x-2} = a - 2$;

e) $\dfrac{(m+1)x + m - 2}{x+3} = m$;

f) $\left|\dfrac{ax+1}{x-1}\right| = a$.

27. Bằng cách đặt ẩn phụ, giải các phương trình sau :

a) $4x^2 - 12x - 5\sqrt{4x^2 - 12x + 11} + 15 = 0$;

b) $x^2 + 4x - 3|x + 2| + 4 = 0$;

c) $4x^2 + \dfrac{1}{x^2} + \left|2x - \dfrac{1}{x}\right| - 6 = 0$.

28. Tìm các giá trị của tham số m sao cho phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$|mx - 2| = |x + 4|.$$

29. Với giá trị nào của a thì phương trình sau vô nghiệm ?

$$\frac{x+1}{x-a+1} = \frac{x}{x+a+2}.$$

Em có biết

VÀI NÉT VỀ LỊCH SỬ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

N. Hen-rich A-ben
(*N. Henrik Abel*, 1802 – 1829)

E. Ga-loa
(*E. Galois, 1811 – 1832*)

Lí thuyết phương trình đại số có lịch sử rất lâu đời. Từ 2000 năm trước Công nguyên, người Ai Cập đã biết giải các phương trình bậc nhất, người Ba-bi-lon đã biết giải các phương trình bậc hai và tìm được những bảng đặc biệt để giải phương trình bậc ba. Tất nhiên, các hệ số của phương trình được xét đều là những số đã cho nhưng cách giải của người xưa chứng tỏ rằng họ cũng biết đến các quy tắc tổng quát. Trong nền toán học cổ của người Hi Lạp, lí thuyết phương trình đại số được phát triển trên cơ sở hình học, liên quan đến việc phát minh ra tính vô ước của một số đoạn thẳng. Vì lúc đó người Hi Lạp chỉ biết các số nguyên dương và phân số dương nên đối với họ, phương trình $x^2 = 2$ vô nghiệm. Tuy nhiên, phương trình đó lại giải được trong phạm vi các đoạn thẳng vì nghiệm của nó là đường chéo của hình vuông có cạnh bằng 1 (đơn vị dài).

Đến thế kỉ VII, lí thuyết phương trình bậc nhất và bậc hai được các nhà toán học Ấn Độ phát triển. Phương pháp giải phương trình bậc hai bằng cách bổ sung thành bình phương của một nhị thức là một sáng kiến của người Ấn Độ. Người Ấn Độ cũng sử dụng rộng rãi các số âm. Họ cũng đưa vào các chữ số mà nay ta gọi là chữ số Ả Rập với cách viết theo vị trí của các chữ số.

Đến thế kỉ XVI, các nhà toán học I-ta-li-a là Tác-ta-gli-a (*N. Tartaglia, 1500 – 1557*), Các-đa-nô (*G. Cardano, 1501 – 1576*) và Fe-ra-ri (*L. Ferrari, 1522 – 1565*) đã giải được các phương trình bậc ba và bậc bốn, tức là tìm được công thức tính nghiệm của phương trình qua các hệ số của nó.

Đến đầu thế kỉ XIX, nhà toán học A-ben, người Na Uy mới chứng minh được rằng không thể giải phương trình tổng quát bậc lớn hơn bốn bằng các phương tiện thuần tuý đại số. Sau cùng, Ga-loa (nhà toán học Pháp) đã giải quyết được trọn vẹn vấn đề giải các phương trình đại số.