§ 8 MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ BẬC HAI

1. Phương trình và bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối

Ví dụ 1. Giải bất phương trình $x^2 - x + |3x - 2| > 0$.

Giải. Trước hết, ta bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

Nếu $3x - 2 \geq 0$ thì $x^2 - x + |3x - 2| = x^2 - x + (3x - 2) = x^2 + 2x - 2$;

Nếu $3x - 2 < 0$ thì $x^2 - x + |3x - 2| = x^2 - x - (3x - 2) = x^2 - 4x + 2$.

Do đó, bất phương trình đã cho tương đương với :

$$\text{(I)} \begin{cases} 3x - 2 \geq 0 \\ x^2 + 2x - 2 > 0 \end{cases} \text{ hoặc (II)} \begin{cases} 3x - 2 < 0 \\ x^2 - 4x + 2 > 0. \end{cases}$$

Nói cách khác, tập nghiệm của bất phương trình đã cho là hợp các tập nghiệm của hai hệ bất phương trình (I) và (II).

Ta có

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{2}{3} \\ x < -1 - \sqrt{3} \text{ hoặc } x > -1 + \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow x > -1 + \sqrt{3}.$$

$$\text{(II)} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{2}{3} \\ x < 2 - \sqrt{2} \text{ hoặc } x > 2 + \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x < 2 - \sqrt{2}.$$

Tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty ; 2 - \sqrt{2}) \cup (-1 + \sqrt{3} ; +\infty)$. □

H1 *Giải phương trình* $|x^2 - 8x + 15| = x - 3$.

2. Phương trình và bất phương trình chứa ẩn trong dấu căn bậc hai

Khi giải phương trình hoặc bất phương trình chứa ẩn trong dấu căn bậc hai, ta thực hiện một số phép biến đổi tương đương để đưa nó về một phương trình hoặc bất phương trình không còn chứa ẩn trong dấu căn bậc hai. Trong quá trình biến đổi cần lưu ý :

– Nêu các điều kiện xác định của phương trình hoặc bất phương trình và nêu điều kiện của nghiệm (nếu có) ;

– Chỉ bình phương hai vế của phương trình hoặc bất phương trình khi cả hai vế đều không âm.

Gộp các điều kiện đó với phương trình hoặc bất phương trình mới nhận được, ta có một hệ phương trình hoặc bất phương trình tương đương với phương trình hoặc bất phương trình đã cho (tức là phương trình hoặc bất phương trình đã cho và hệ thu được có cùng tập nghiệm).

Ở đây, ta chỉ xét một số ví dụ đơn giản.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sqrt{3x^2 + 24x + 22} = 2x + 1$.

Phân tích. Điều kiện xác định của phương trình đã cho là

$$3x^2 + 24x + 22 \geq 0. \qquad (1)$$

Dễ thấy nghiệm của phương trình đã cho phải thoả mãn điều kiện

$$2x + 1 \geq 0. \qquad (2)$$

Với các điều kiện (1) và (2), phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$3x^2 + 24x + 22 = (2x + 1)^2. \qquad (3)$$

Hiển nhiên (3) kéo theo (1). Do đó, nghiệm của phương trình đã cho là nghiệm của phương trình (3) thoả mãn bất phương trình (2). Nói một cách khác, phương trình đã cho tương đương với hệ gồm bất phương trình (2) và phương trình (3).

Sau đây là bài giải ví dụ 2.

Giải. Phương trình đã cho tương đương với hệ

$$\text{(I)} \begin{cases} 2x + 1 \geq 0, \\ 3x^2 + 24x + 22 = (2x + 1)^2. \end{cases}$$

Ta có

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{2}, \\ x^2 - 20x - 21 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{2}, \\ x = -1 \text{ hoặc } x = 21 \end{cases} \Leftrightarrow x = 21.$$

Nghiệm của phương trình đã cho là $x = 21$. □

H2 *Giải phương trình* $\sqrt{x^2 + 56x + 80} = x + 20$.

Ví dụ 3. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2 - 3x - 10} < x - 2$.

Phân tích. Điều kiện xác định của bất phương trình đã cho là

$$x^2 - 3x - 10 \geq 0. \qquad (1)$$

Dễ thấy nghiệm của bất phương trình đã cho phải thoả mãn điều kiện

$$x - 2 > 0. \qquad (2)$$

Với hai điều kiện (1) và (2), bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình

$$x^2 - 3x - 10 < (x - 2)^2. \qquad (3)$$

Như vậy, bất phương trình đã cho tương đương với hệ gồm ba bất phương trình (1), (2) và (3).

Sau đây là bài giải ví dụ 3.

Giải. Bất phương trình đã cho tương đương với hệ

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} x^2 - 3x - 10 \geq 0 \\ x - 2 > 0 \\ x^2 - 3x - 10 < (x - 2)^2. \end{cases}$$

Ta có

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \text{ hoặc } x \geq 5 \\ x > 2 \\ x < 14 \end{cases} \Leftrightarrow \quad 5 \leq x < 14.$$

Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là [5 ; 14). □

H3 *Giải bất phương trình* $\sqrt{x^2 - 2x - 15} < x - 3$.

Ví dụ 4. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2 - 4x} > x - 3$.

Phân tích. Điều kiện xác định của bất phương trình đã cho là

$$x^2 - 4x \geq 0. \qquad (1)$$

Để khử dấu căn chứa ẩn, ta xét hai trường hợp :

Trường hợp 1

$$x - 3 < 0. \qquad (2)$$

Hiển nhiên, nghiệm chung của (1) và (2) là nghiệm của bất phương trình đã cho. Nói một cách khác, trong trường hợp này, bất phương trình đã cho tương đương với hệ gồm hai bất phương trình (1) và (2).

Trường hợp 2

$$x - 3 \geq 0. \qquad (3)$$

Với các điều kiện (1) và (3), bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình

$$x^2 - 4x > (x - 3)^2. \qquad (4)$$

Hiển nhiên (4) kéo theo (1). Do đó, nghiệm chung của hai bất phương trình (3) và (4) là nghiệm của bất phương trình đã cho. Nói cách khác, trong trường hợp này, bất phương trình đã cho tương đương với hệ gồm hai bất phương trình (3) và (4).

Sau đây là bài giải ví dụ 4.

Giải. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\text{(I)} \begin{cases} x^2 - 4x \geq 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases} \text{ hoặc (II)} \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ x^2 - 4x > (x-3)^2. \end{cases}$$

Ta có

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \text{ hoặc } x \geq 4 \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 0.$$

$$\text{(II)} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 2x > 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x > \dfrac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{9}{2}.$$

Nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$x \leq 0 \text{ và } x > \frac{9}{2}.$$

Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(-\infty\,;\,0] \cup \left(\dfrac{9}{2}\,;+\infty\right)$. □

H4 *Giải bất phương trình* $\sqrt{x^2 - 1} > x + 2$.

Câu hỏi và bài tập

65. Giải các phương trình và bất phương trình sau :

a) $\left|x^2 - 5x + 4\right| = x^2 + 6x + 5$; b) $|x - 1| = 2x - 1$;

c) $\left|-x^2 + x - 1\right| \le 2x + 5$; d) $\left|x^2 - x\right| \le \left|x^2 - 1\right|$.

66. Giải các phương trình sau :

a) $\sqrt{2x^2 + 4x - 1} = x + 1$; b) $\sqrt{4x^2 + 101x + 64} = 2(x + 10)$;

c) $\sqrt{x^2 + 2x} = -2x^2 - 4x + 3$; d) $\sqrt{(x + 1)(x + 2)} = x^2 + 3x - 4$.

Hướng dẫn. c) Đặt $y = \sqrt{x^2 + 2x}$, $y \ge 0$, ta được phương trình $y = -2y^2 + 3$.

d) Vì $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$ nên đặt $y = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$, $y \ge 0$, ta được phương trình $y = y^2 - 6$.

67. Giải các bất phương trình :

a) $\sqrt{x^2 + x - 6} < x - 1$; b) $\sqrt{2x - 1} \le 2x - 3$;

c) $\sqrt{2x^2 - 1} > 1 - x$; d) $\sqrt{x^2 - 5x - 14} \ge 2x - 1$.

68. Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau :

a) $y = \sqrt{\left|x^2 + 3x - 4\right| - x + 8}$; b) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + x + 1}{|2x - 1| - x - 2}}$;

c) $y = \sqrt{\dfrac{1}{x^2 - 7x + 5} - \dfrac{1}{x^2 + 2x + 5}}$; d) $y = \sqrt{\sqrt{x^2 - 5x - 14} - x + 3}$.

Bài đọc thêm

XÉT DẤU PHÂN THỨC HỮU TỈ BẰNG PHƯƠNG PHÁP KHOẢNG

Biểu thức có dạng $\frac{P(x)}{Q(x)}$, trong đó $P(x)$ và $Q(x)$ là những đa thức, được gọi là một phân thức hữu tỉ.

Người ta chứng minh được rằng : Nếu các đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ có các nghiệm $x_1, x_2, ..., x_n$ đôi một khác nhau và $x_1 < x_2 < ... < x_n$ thì trên mỗi khoảng

$$(-\infty ; x_1), (x_1 ; x_2), ..., (x_{n-1} ; x_n), (x_n ; +\infty),$$

phân thức $\frac{P(x)}{Q(x)}$ giữ một dấu không đổi.

Áp dụng điều khẳng định trên, muốn xác định dấu của $\frac{P(x)}{Q(x)}$ trên mỗi khoảng đã nêu, ta chỉ cần tính giá trị của phân thức tại một điểm nào đó của khoảng.

Phương pháp được sử dụng để xét dấu phân thức hữu tỉ trong các ví dụ sau đây được gọi là phương pháp khoảng.

Ví dụ 1. Xét dấu của phân thức hữu tỉ

$$f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - 2x - 3}{x^2 - x - 12}.$$

Giải. Tử thức

$$2x^3 + 3x^2 - 2x - 3 = 2x(x^2 - 1) + 3(x^2 - 1) = (2x + 3)(x + 1)(x - 1)$$

có các nghiệm là $-\frac{3}{2}$, -1 và 1.

Mẫu thức là tam thức bậc hai có các nghiệm là -3 và 4.

Ta viết phân thức dưới dạng

$$f(x) = \frac{(2x+3)(x+1)(x-1)}{(x+3)(x-4)}$$

và sắp xếp các nghiệm của tử thức và mẫu thức của $f(x)$ theo thứ tự tăng dần

$$-3, -\frac{3}{2}, -1, 1, 4.$$

Các nghiệm này chia $\mathbb{R}$ thành sáu khoảng

$$(-\infty ; -3), \left(-3 ; -\frac{3}{2}\right), \left(-\frac{3}{2} ; -1\right), (-1 ; 1), (1 ; 4) \text{ và } (4 ; +\infty).$$

Ta xác định dấu của $f(x)$ trên mỗi khoảng đã nêu.

Ta có $f(0) = \frac{1}{4} > 0$, do đó $f(x) > 0$ trên khoảng $(-1 ; 1)$. Khi x qua điểm 1, chỉ có nhị thức $x - 1$ đổi dấu, các nhị thức khác đều giữ nguyên dấu; do đó $f(x)$ đổi dấu. Vì vậy, $f(x) < 0$ trên khoảng $(1 ; 4)$. Khi x qua điểm -1, chỉ có nhị thức $x + 1$ đổi dấu, do đó $f(x)$ đổi dấu. Vì vậy $f(x) < 0$ trên khoảng $\left(-\frac{3}{2} ; -1\right)$. Dấu của $f(x)$ trên các khoảng còn lại được xác định một cách tương tự và ta được bảng xét dấu sau :

x	$-\infty$		-3		$-\frac{3}{2}$		-1		1		4		$+\infty$
$f(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

□

Ví dụ 2. Xét dấu biểu thức

$$P(x) = (x^2 + 2x + 1)(2x - 1)(x^2 - 5x + 4).$$

Giải. Tam thức bậc hai $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ có nghiệm kép $x = -1$. Nghiệm của nhị thức bậc nhất $2x - 1$ là $\frac{1}{2}$. Nghiệm của tam thức bậc hai $x^2 - 5x + 4$ là 1 và 4. Ta viết biểu thức đã cho dưới dạng

$$P(x) = (x + 1)^2(2x - 1)(x - 1)(x - 4).$$

Các nghiệm của $P(x)$ sắp xếp theo thứ tự tăng dần là

$$-1, \frac{1}{2}, 1 \text{ và } 4.$$

Các nghiệm này chia $\mathbb{R}$ thành năm khoảng

$$(-\infty ; -1), \left(-1 ; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2} ; 1\right), (1 ; 4) \text{ và } (4 ; +\infty).$$

Ta xác định dấu của $P(x)$ trên mỗi khoảng đã nêu.

Ta có $P(0) = -4 < 0$. Do đó $f(x) < 0$ trên khoảng $(-1 ; \frac{1}{2})$. Khi x qua điểm $\frac{1}{2}$, chỉ có nhị thức $2x - 1$ đổi dấu. Do đó $P(x)$ đổi dấu và ta có $P(x) > 0$ trên khoảng $\left(\frac{1}{2} ; 1\right)$. Tương tự, $P(x)$ âm trên khoảng $(1 ; 4)$ và dương trên khoảng $(4 ; +\infty)$.

Nhân tử $(x + 1)^2$ bằng 0 tại điểm $x = -1$, nhưng luôn dương với mọi $x \neq -1$ nên khi x qua điểm -1, $P(x)$ không đổi dấu. Do đó, $P(x) < 0$ trên khoảng $(-\infty ; -1)$. Ta có bảng xét dấu sau :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		1		4		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

□

Luyện tập

69. Giải các phương trình và bất phương trình sau :

a) $\left|\dfrac{x^2-2}{x+1}\right| = 2$;

b) $\left|\dfrac{3x+4}{x-2}\right| \le 3$;

c) $\left|\dfrac{2x-3}{x-3}\right| \ge 1$;

d) $|2x+3| = |4-3x|$.

70. Giải các bất phương trình sau :

a) $\left|x^2-5x+4\right| \le x^2+6x+5$;

b) $4x^2+4x-|2x+1| \ge 5$.

71. Giải các phương trình sau :

a) $\sqrt{5x^2-6x-4} = 2(x-1)$;

b) $\sqrt{x^2+3x+12} = x^2+3x$.

72. Giải các bất phương trình sau :

a) $\sqrt{x^2+6x+8} \le 2x+3$;

b) $\dfrac{2x-4}{\sqrt{x^2-3x-10}} > 1$;

c) $6\sqrt{(x-2)(x-32)} \le x^2-34x+48$.

Hướng dẫn. c) Đặt $y = \sqrt{(x-2)(x-32)} = \sqrt{x^2-34x+64}$.

73. Giải các bất phương trình sau :

a) $\sqrt{x^2-x-12} \ge x-1$;

b) $\sqrt{x^2-4x-12} > 2x+3$;

c) $\dfrac{\sqrt{x+5}}{1-x} < 1$.

74. Tìm các giá trị của m sao cho phương trình

$$x^4+(1-2m)x^2+m^2-1=0$$

a) Vô nghiệm ;

b) Có hai nghiệm phân biệt ;

c) Có bốn nghiệm phân biệt.

75. Tìm các giá trị của a sao cho phương trình

$$(a-1)x^4-ax^2+a^2-1=0$$

có ba nghiệm phân biệt.