

§ 5 MỘT SỐ VÍ DỤ VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI HAI ẨN

Để giải một hệ phương trình bậc hai với hai ẩn, ta cũng thường dùng các phương pháp quen thuộc như phương pháp thế, phương pháp cộng đại số và phương pháp đặt ẩn phụ. Tất nhiên, việc chọn phương pháp nào phụ thuộc vào các phương trình cụ thể. Sau đây là một số ví dụ đơn giản.

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình

$$(I) \begin{cases} x + 2y = 5 \\ x^2 + 2y^2 - 2xy = 5. \end{cases}$$

Cách giải. Dùng phương pháp thế, tính x theo y từ phương trình thứ nhất rồi thế vào phương trình thứ hai, ta được

$$(Ia) \begin{cases} x = 5 - 2y \\ 10y^2 - 30y + 20 = 0. \end{cases}$$

H1 Giải tiếp hệ (Ia) rồi suy ra nghiệm của hệ (I).

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình

$$(II) \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ xy + x + y = 2. \end{cases}$$

Cách giải. Ta có nhận xét rằng vế trái của mỗi phương trình trong hệ đã cho là một biểu thức đối xứng đối với x và y (nghĩa là : Khi thay thế x bởi y và y bởi x thì biểu thức không thay đổi). Trong trường hợp này, ta dùng cách đặt ẩn phụ

$$S = x + y \text{ và } P = xy.$$

Khi đó, $x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy = S^2 - P$.

Do đó, từ hệ (II), ta có hệ phương trình (ẩn là S và P)

$$\begin{cases} S^2 - P = 4 \\ S + P = 2. \end{cases}$$

Dễ thấy hệ này có hai nghiệm là $\begin{cases} S = -3 \\ P = 5 \end{cases}$ và $\begin{cases} S = 2 \\ P = 0. \end{cases}$

Do đó

$$(II) \Leftrightarrow (IIa) \begin{cases} x + y = -3 \\ xy = 5 \end{cases} \text{ hoặc } (IIb) \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 0. \end{cases}$$

H2 Giải hai hệ phương trình (IIa) và (IIb) rồi kết luận về nghiệm của (II).

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình

$$(III) \begin{cases} x^2 - 2x = y \\ y^2 - 2y = x. \end{cases}$$

Cách giải. Ta có nhận xét : Trong hệ (III), nếu thay thế đồng thời x bởi y và y bởi x thì phương trình thứ nhất biến thành phương trình thứ hai và ngược lại, phương trình thứ hai biến thành phương trình thứ nhất.

Đối với hệ phương trình có tính chất đó, ta thường giải bằng cách trừ từng vế hai phương trình trong hệ. Cụ thể, đối với hệ (III) ta trừ từng vế hai phương trình trong hệ và được

$$\begin{aligned} (x^2 - y^2) - 2(x - y) &= -(x - y) \Leftrightarrow (x - y)(x + y - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - y = 0 \text{ hoặc } x + y - 1 = 0. \end{aligned}$$

Do đó

$$(III) \Leftrightarrow (IIIa) \begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 - 2x = y \end{cases} \text{ hoặc } (IIIb) \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x^2 - 2x = y. \end{cases}$$

Ta chỉ còn phải giải hai hệ (IIIa) và (IIIb) mà ta đã biết cách giải.

H3 Giải các hệ phương trình (IIIa) và (IIIb) rồi suy ra nghiệm của hệ (III).

CHÚY

1) Các hệ phương trình có tính chất như trong hai ví dụ 2 và 3 được gọi chung là *hệ phương trình đối xứng* (đối với hai ẩn).

2) Nếu một hệ phương trình đối xứng có nghiệm là $(a; b)$ thì nó cũng có nghiệm là $(b; a)$. Nhận xét này rất hữu ích khi gặp các bài toán về hệ phương trình đối xứng.

H4 Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 + y = 5x \\ 2y^2 + x = 5y. \end{cases}$ Biết rằng hệ đã cho có bốn nghiệm và hai

trong bốn nghiệm đó là $(2; 2)$ và $\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}; \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$. Tìm các nghiệm còn lại mà không cần biến đổi hệ phương trình. Hãy nêu rõ cách tìm.

Câu hỏi và bài tập

45. Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + y^2 = 164; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 - 5xy + y^2 = 7 \\ 2x + y = 1. \end{cases}$

46. Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ xy + x + y = 5; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 - x + y = 2 \\ xy + x - y = -1; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 - 3x = 2y \\ y^2 - 3y = 2x. \end{cases}$

47. Tìm quan hệ giữa S và P để hệ phương trình sau có nghiệm :

$$\begin{cases} x + y = S \\ xy = P. \end{cases}$$

(S và P là hai số cho trước).

48. Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 208 \\ xy = 96; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 55 \\ xy = 24. \end{cases}$

49. Tìm hàm số bậc hai $y = f(x)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau :

1) Parabol $y = f(x)$ cắt trục tung tại điểm $(0; -4)$.

2) $f(2) = 6$.

3) Phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm và hiệu giữa nghiệm lớn và nghiệm nhỏ bằng 5.