§ 2 PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI MỘT ẨN

Ta đã biết cách giải :

– *Phương trình bậc nhất* (ẩn x) là phương trình có dạng $ax + b = 0$ (a và b là hai số đã cho với $a \neq 0$) ;

– *Phương trình bậc hai* (ẩn x) là phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b và c là ba số đã cho với $a \neq 0$) ; $\Delta = b^2 - 4ac$ gọi là *biệt thức*, $\Delta' = b'^2 - ac$ (với $b = 2b'$) gọi là *biệt thức thu gọn* của phương trình bậc hai.

Trong bài này, chúng ta sẽ nghiên cứu cách giải và biện luận các phương trình bậc nhất và bậc hai có chứa tham số.

1. Giải và biện luận phương trình dạng $ax + b = 0$

Kết quả giải và biện luận phương trình dạng $ax + b = 0$ được nêu trong bảng sau đây.

1) $a \neq 0$	: Phương trình có một nghiệm duy nhất $x = -\dfrac{b}{a}$.
2) $a = 0$ và $b \neq 0$	: Phương trình vô nghiệm.
3) $a = 0$ và $b = 0$	: Phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 1. Giải và biện luận phương trình sau theo tham số m

$$m^2x + 2 = x + 2m. \qquad (1)$$

Giải. Ta biến đổi tương đương

$$(1) \Leftrightarrow m^2x - x = 2m - 2$$

$$\Leftrightarrow (m^2 - 1)x = 2(m - 1). \qquad (1a)$$

Xét các trường hợp sau đây.

1) Khi $m \neq \pm 1$ (tức là $m \neq 1$ và $m \neq -1$), ta có $m^2 - 1 \neq 0$ nên (1a) có nghiệm

$$x = \frac{2(m-1)}{m^2-1} = \frac{2}{m+1}.$$

Đó là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

2) Khi $m = 1$, phương trình (1a) trở thành $0x = 0$; phương trình này nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên phương trình (1) cũng nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

3) Khi $m = -1$, phương trình (1a) trở thành $0x = -4$; phương trình này vô nghiệm nên phương trình (1) cũng vô nghiệm.

Kết luận

$m \neq \pm 1$: (1) có nghiệm $x = \dfrac{2}{m+1}$ $\left(\text{tập nghiệm là } S = \left\{\dfrac{2}{m+1}\right\}\right)$.

$m = -1$: (1) vô nghiệm (tập nghiệm là $S = \varnothing$).

$m = 1$: (1) nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ (tập nghiệm là $S = \mathbb{R}$). □

2. Giải và biện luận phương trình dạng $ax^2 + bx + c = 0$

Kết quả giải và biện luận phương trình dạng $ax^2 + bx + c = 0$ được nêu trong bảng sau đây.

1) $a = 0$: Trở về giải và biện luận phương trình $bx + c = 0$.
2) $a \neq 0$:
• $\Delta > 0$: phương trình có hai nghiệm (phân biệt) $x = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ và $x = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$;
• $\Delta = 0$: phương trình có một nghiệm (kép) $x = -\dfrac{b}{2a}$;
• $\Delta < 0$: phương trình vô nghiệm.

H1 *Trong trường hợp nào thì phương trình* $ax^2 + bx + c = 0$:

a) Có một nghiệm duy nhất ?

b) Vô nghiệm ?

Ví dụ 2. Giải và biện luận phương trình sau theo tham số m

$$mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0. \tag{2}$$

Giải. Với $m = 0$, phương trình (2) trở thành $4x - 3 = 0$; nó có nghiệm $x = \dfrac{3}{4}$.

Với $m \neq 0$, (2) là phương trình bậc hai với biệt thức thu gọn là

$$\Delta' = (m-2)^2 - m(m-3) = 4 - m.$$

Do đó :

– Nếu $m > 4$ thì $\Delta' < 0$ nên (2) vô nghiệm ;

– Nếu $m = 4$ thì $\Delta' = 0$ nên (2) có một nghiệm $x = \dfrac{m-2}{m} = \dfrac{1}{2}$;

– Nếu $m < 4$ và $m \neq 0$ thì $\Delta' > 0$ nên (2) có hai nghiệm

$$x = \frac{m-2-\sqrt{4-m}}{m} \text{ và } x = \frac{m-2+\sqrt{4-m}}{m}.$$

Kết luận.

$m > 4$: (2) vô nghiệm ;

$m = 0$: (2) có nghiệm $x = \dfrac{3}{4}$;

$0 \neq m \leq 4$: (2) có hai nghiệm $x = \dfrac{m-2\pm\sqrt{4-m}}{m}$

(hai nghiệm này trùng nhau và bằng $\dfrac{1}{2}$ khi $m = 4$).

H2 *Giải và biện luận phương trình* $(x-1)(x-mx+2)=0$ *theo tham số m.*

Ví dụ 3. Cho phương trình

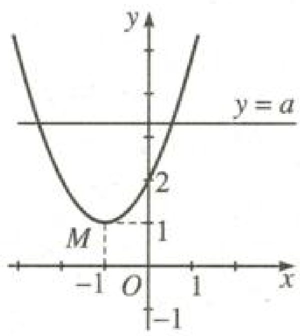
$$3x+2 = -x^2+x+a. \tag{3}$$

Bằng đồ thị, hãy biện luận số nghiệm của phương trình (3) tuỳ theo các giá trị của tham số a.

Giải. Trước hết, ta đưa phương trình (3) về dạng

$$x^2+2x+2 = a. \tag{4}$$

Số nghiệm của phương trình (3) cũng là số nghiệm của phương trình (4) và bằng số giao điểm của parabol $(P) : y = x^2+2x+2$ với đường thẳng $(d) : y = a$. Quan sát đồ thị (h.3.1), ta thấy đỉnh của parabol (P) là điểm $M(-1\ ;\ 1)$, khi a thay đổi thì đường thẳng (d) cũng thay đổi nhưng luôn song song (hoặc trùng) với trục hoành. Từ đó, ta suy ra :



Hình 3.1

– Với $a < 1$, phương trình (3) vô nghiệm (đường thẳng (d) và parabol (P) không có điểm chung) ;

– Với $a = 1$, phương trình (3) có một nghiệm (kép) (đường thẳng (d) tiếp xúc với parabol (P)) ;

– Với $a > 1$, phương trình (3) có hai nghiệm (đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt). □

CHÚ Ý

Khi viết phương trình (3) dưới dạng $x^2 + 3x + 2 = x + a$, ta thấy kết quả trên còn cho biết số giao điểm của parabol $y = x^2 + 3x + 2$ với đường thẳng $y = x + a$.

3. Ứng dụng của định lí Vi-ét

• Ở lớp dưới, chúng ta đã học định lí Vi-ét đối với phương trình bậc hai.

> Hai số x_1 và x_2 là các nghiệm của phương trình bậc hai
> $$ax^2 + bx + c = 0$$
> khi và chỉ khi chúng thoả mãn các hệ thức
> $$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ và } x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Định lí Vi-ét có nhiều ứng dụng quan trọng, chẳng hạn như :

1) *Nhẩm nghiệm của phương trình bậc hai* ;

2) *Phân tích đa thức thành nhân tử :*

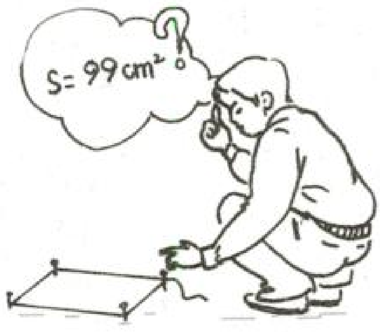
Nếu đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ có hai nghiệm x_1 và *x_2 thì nó có thể phân tích thành nhân tử $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$* (xem bài tập 9) ;

3) *Tìm hai số biết tổng và tích của chúng :*

Nếu hai số có tổng là S và tích là P thì chúng là các nghiệm của phương trình $x^2 - Sx + P = 0$.

H3 *Có thể khoanh một sợi dây dài 40 cm thành một hình chữ nhật có diện tích S cho trước trong mỗi trường hợp sau đây được hay không ?*

a) $S = 99$ cm^2 ;   b) $S = 100$ cm^2 ;   c) $S = 101$ cm^2.



• Sau đây, ta sẽ tìm hiểu một ứng dụng quan trọng khác của định lí Vi-ét là *xét dấu các nghiệm của phương trình bậc hai.*

Định lí Vi-ét cho phép ta nhận biết dấu các nghiệm của một phương trình bậc hai mà không cần tìm các nghiệm đó. Ta có nhận xét sau đây.

Nhận xét

Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm x_1 và x_2 $(x_1 \leq x_2)$. Đặt $S = -\dfrac{b}{a}$ và $P = \dfrac{c}{a}$. Khi đó :

– *Nếu $P < 0$ thì* $x_1 < 0 < x_2$ (hai nghiệm trái dấu) ;

– *Nếu $P > 0$ và $S > 0$ thì* $0 < x_1 \leq x_2$ (hai nghiệm dương) ;

– *Nếu $P > 0$ và $S < 0$ thì* $x_1 \leq x_2 < 0$ (hai nghiệm âm).

Ví dụ 4. Phương trình $\left(1-\sqrt{2}\right)x^2 - 2\left(1+\sqrt{2}\right)x + \sqrt{2} = 0$ có $a = 1 - \sqrt{2} < 0$ và $c = \sqrt{2} > 0$ nên $P < 0$.

Vậy phương trình đó có hai nghiệm trái dấu. □

CHÚ Ý

Trong ví dụ 4, cả hai kết luận phương trình có hai nghiệm và hai nghiệm đó trái dấu đều được suy ra từ $P < 0$.

Trường hợp $P > 0$, ta phải tính Δ (hay Δ') để xem phương trình có nghiệm hay không rồi mới tính S để xác định dấu các nghiệm.

Ví dụ 5. Xét dấu các nghiệm của phương trình sau (nếu có)

$$\left(2-\sqrt{3}\right)x^2 + 2\left(1-\sqrt{3}\right)x + 1 = 0. \qquad (*)$$

Giải. Ta có

$a = 2 - \sqrt{3} > 0$ và $c = 1 > 0 \Rightarrow P > 0$;

$\Delta' = \left(1-\sqrt{3}\right)^2 - \left(2-\sqrt{3}\right) = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow \Delta' > 0$ (vậy (*) có hai nghiệm phân biệt) ;

$a = 2 - \sqrt{3} > 0$ và $-b' = -\left(1-\sqrt{3}\right) = \sqrt{3} - 1 > 0 \Rightarrow S > 0$.

Do đó, phương trình đã cho có hai nghiệm dương. □

H4 *Với mỗi phương trình cho trong a) và b) dưới đây, hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định đã cho.*

a) Phương trình $-0{,}5x^2 + 2{,}7x + 1{,}5 = 0$

(A) *Có hai nghiệm trái dấu ;* (B) *Có hai nghiệm dương ;*

(C) *Có hai nghiệm âm ;* (D) *Vô nghiệm.*

b) Phương trình $x^2 - \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)x + \sqrt{6} = 0$

(A) *Có hai nghiệm trái dấu ;* (B) *Có hai nghiệm dương ;*

(C) *Có hai nghiệm âm ;* (D) *Vô nghiệm.*

• Việc xét dấu các nghiệm của phương trình bậc hai giúp ta xác định được số nghiệm của phương trình trùng phương.

Ta đã biết, đối với phương trình trùng phương

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \quad (4)$$

nếu đặt $y = x^2$ $(y \geq 0)$ thì ta đi đến phương trình bậc hai đối với y

$$ay^2 + by + c = 0. \quad (5)$$

Do đó, muốn biết số nghiệm của phương trình (4), ta chỉ cần biết số nghiệm của phương trình (5) và dấu của chúng.

H5 *Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai ?*

a) Nếu phương trình (4) có nghiệm thì phương trình (5) có nghiệm ;

b) Nếu phương trình (5) có nghiệm thì phương trình (4) có nghiệm.

Ví dụ 6. Cho phương trình

$$\sqrt{2}x^4 - 2(\sqrt{2} - \sqrt{3})x^2 - \sqrt{12} = 0. \quad (6)$$

Không giải phương trình, hãy xét xem phương trình (6) có bao nhiêu nghiệm ?

Giải. Đặt $y = x^2$ $(y \geq 0)$, ta đi đến phương trình

$$\sqrt{2}y^2 - 2(\sqrt{2} - \sqrt{3})y - \sqrt{12} = 0. \quad (7)$$

Phương trình (7) có $a = \sqrt{2} > 0$ và $c = -\sqrt{12} < 0$ nên có hai nghiệm trái dấu. Vậy phương trình (7) có một nghiệm dương duy nhất, suy ra phương trình (6) có hai nghiệm đối nhau. □

Câu hỏi và bài tập

5. Xem các bài giải sau đây và cho biết mỗi bài giải đó đúng hay sai. Vì sao ?

a) $\dfrac{(x-2)(x-1)}{\sqrt{x}-1}=0 \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{\sqrt{x}-1}(x-1)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{\sqrt{x}-1}=0$ hoặc $x-1=0$.

Ta có $\dfrac{x-2}{\sqrt{x}-1}=0 \Leftrightarrow x=2$; $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{1\ ;\ 2\}$.

b) $\sqrt{x^2-2}=1-x \Leftrightarrow x^2-2=(1-x)^2 \Leftrightarrow x^2-2=1-2x+x^2$

$$\Leftrightarrow 2x=3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}.$$

Vậy phương trình có một nghiệm $x=\dfrac{3}{2}$.

6. Giải và biện luận các phương trình :

a) $(m^2+2)x-2m=x-3$;   b) $m(x-m)=x+m-2$;

c) $m(x-m+3)=m(x-2)+6$;   d) $m^2(x-1)+m=x(3m-2)$.

7. Dựa vào hình 3.1 (trang 74), tìm các giá trị của a để phương trình (3) cho trong ví dụ 3 có nghiệm dương. Khi đó, hãy tìm nghiệm dương của (3).

8. Giải và biện luận các phương trình :

a) $(m-1)x^2+3x-1=0$;

b) $x^2-4x+m-3=0$.

9. a) Giả sử phương trình $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ có hai nghiệm là x_1 và x_2. Chứng minh rằng ta có thể phân tích $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

b) *Áp dụng*. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

$f(x)=-2x^2-7x+4$ và $g(x)=(\sqrt{2}+1)x^2-2(\sqrt{2}+1)x+2$.

10. Không giải phương trình $x^2-2x-15=0$, hãy tính :

a) Tổng các bình phương hai nghiệm của nó ;

b) Tổng các lập phương hai nghiệm của nó ;

c) Tổng các luỹ thừa bậc bốn hai nghiệm của nó.

Hướng dẫn. $x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2$.

11. Trong các khẳng định sau đây, có duy nhất một khẳng định đúng. Hãy chọn khẳng định đúng đó.

Phương trình $\left(\sqrt{3}-1\right)x^4+x^2+2\left(1-\sqrt{3}\right)=0$:

(A) Vô nghiệm ;

(B) Có hai nghiệm $x=\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{33-16\sqrt{3}}-1\right)}$;

(C) Có bốn nghiệm $x=\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{33-16\sqrt{3}}-1\right)}$ và $x=\pm\sqrt{3}$;

(D) Có hai nghiệm $x=\pm\sqrt{3}$.

Bài đọc thêm

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI BẰNG MÁY TÍNH CASIO *fx - 500MS*

Máy tính CASIO *fx - 500MS* có thể giúp ta tìm nghiệm đúng hoặc nghiệm gần đúng (với chín chữ số thập phân) của phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ với các *hệ số bằng số.*

Để giải phương trình $ax^2+bx+c=0$, trước hết ta ấn các phím $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{\triangleright}$ $\boxed{2}$ để vào chương trình giải. Sau đó, ta nhập từng hệ số bằng cách ấn phím tương ứng với hệ số đó và phím $\boxed{=}$.

• Để giải phương trình $2x^2-5x-3=0$, ta ấn lần lượt các phím sau :

$$\boxed{\text{MODE}}\ \boxed{\text{MODE}}\ \boxed{1}\ \boxed{\triangleright}\ \boxed{2}\,2\ \boxed{=}\ \boxed{(-)}\,5\ \boxed{=}\ \boxed{(-)}\,3\boxed{=}$$

Khi đó, kết quả là $x_1=3$. Ấn tiếp phím $\boxed{=}$, ta được $x_2=-0{,}5$.

• Để giải phương trình $9x^2-12x+4=0$, ta ấn lần lượt các phím sau :

$$\boxed{\text{MODE}}\ \boxed{\text{MODE}}\ \boxed{1}\ \boxed{\triangleright}\ \boxed{2}\ 9\ \boxed{=}\ \boxed{(-)}\,12\ \boxed{=}\,4\boxed{=}$$

Khi đó, kết quả là $x\approx 0{,}666\,666\,666$. Ấn tiếp hai phím $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{d/c}}$, ta được $x=\dfrac{2}{3}$.

Đó là nghiệm kép của phương trình.

• Để giải phương trình $5x^2 + 4x + 1 = 0$, ta ấn lần lượt các phím sau :

$\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{\triangleright}$ $\boxed{2}$ 5 $\boxed{=}$ 4 $\boxed{=}$ 1 $\boxed{=}$

Khi đó, trên màn hình xuất hiện giá trị $x_1 = -0.4$ cùng với kí hiệu $R \Leftrightarrow I$ ở góc trên bên phải. Điều đó có nghĩa là phương trình đã cho không có nghiệm thực.

• Để giải phương trình $x^2 + 5,3x - 1,46 = 0$, ta ấn lần lượt các phím sau :

$\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{\triangleright}$ $\boxed{2}$ 1 $\boxed{=}$ 5,3 $\boxed{=}$ $\boxed{(-)}$ 1,46 $\boxed{=}$

Khi đó, kết quả là $x_1 \approx 0,262\,473\,175$. Ấn tiếp phím $\boxed{=}$, ta được $x_2 \approx -5,562\,473\,176$. Đó là các nghiệm gần đúng của phương trình.

Luyện tập

12. Giải và biện luận các phương trình sau (m là tham số) :

a) $2(m + 1)x - m(x - 1) = 2m + 3$;
b) $m^2(x - 1) + 3mx = (m^2 + 3)x - 1$;
c) $3(m + 1)x + 4 = 2x + 5(m + 1)$;
d) $m^2x + 6 = 4x + 3m$.

13. a) Tìm các giá trị của p để phương trình $(p + 1)x - (x + 2) = 0$ vô nghiệm.

b) Tìm các giá trị của p để phương trình $p^2x - p = 4x - 2$ có vô số nghiệm.

14. Tính nghiệm gần đúng của các phương trình sau (chính xác đến hàng phần trăm) :

a) $x^2 - 5,60x + 6,41 = 0$;
b) $\sqrt{2}\,x^2 + 4\sqrt{3}\,x - 2\sqrt{2} = 0$.

15. Tìm độ dài các cạnh của một tam giác vuông, biết rằng cạnh thứ nhất dài hơn cạnh thứ hai là 2 m, cạnh thứ hai dài hơn cạnh thứ ba là 23 m.

16. Giải và biện luận các phương trình sau (m và k là tham số) :

a) $(m - 1)x^2 + 7x - 12 = 0$;
b) $mx^2 - 2(m + 3)x + m + 1 = 0$;
c) $[(k + 1)x - 1](x - 1) = 0$;
d) $(mx - 2)(2mx - x + 1) = 0$.

17. Biện luận số giao điểm của hai parabol $y = -x^2 - 2x + 3$ và $y = x^2 - m$ theo tham số m.

18. Tìm các giá trị của m để phương trình $x^2 - 4x + m - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1 và x_2 thoả mãn hệ thức $x_1^3 + x_2^3 = 40$.

19. Giải phương trình $x^2 + (4m + 1)x + 2(m - 4) = 0$, biết rằng nó có hai nghiệm và hiệu giữa nghiệm lớn và nghiệm nhỏ bằng 17.

20. Không giải phương trình, hãy xét xem mỗi phương trình trùng phương sau đây có bao nhiêu nghiệm.

a) $x^4 + 8x^2 + 12 = 0$;

b) $-1{,}5x^4 - 2{,}6x^2 + 1 = 0$;

c) $\left(1-\sqrt{2}\right)x^4 + 2x^2 + 1 - \sqrt{2} = 0$;

d) $-x^4 + \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x^2 = 0$.

21. Cho phương trình $kx^2 - 2(k+1)x + k + 1 = 0$.

a) Tìm các giá trị của k để phương trình trên có ít nhất một nghiệm dương.

b) Tìm các giá trị của k để phương trình trên có một nghiệm lớn hơn 1 và một nghiệm nhỏ hơn 1. *Hướng dẫn.* Đặt $x = y + 1$.