

§ 3

TẬP HỢP VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

1. Tập hợp

Ở lớp dưới, chúng ta đã làm quen với khái niệm tập hợp. Nhớ lại rằng

Tập hợp là một khái niệm cơ bản của toán học. Ta hiểu khái niệm tập hợp qua các ví dụ như : Tập hợp tất cả các học sinh lớp 10 của trường em, tập hợp các số nguyên tố,... . Thông thường, mỗi tập hợp gồm các phần tử cùng có chung một hay một vài tính chất nào đó.

Nếu a là phần tử của tập hợp X , ta viết $a \in X$ (đọc là : a thuộc X). Nếu a không phải là phần tử của X , ta viết $a \notin X$ (đọc là : a không thuộc X). Để cho gọn, đôi khi "tập hợp" sẽ được gọi tắt là "tập".

Ta thường cho một tập hợp bằng hai cách sau đây.

1) Liệt kê các phần tử của tập hợp.

H1 Viết tập hợp tất cả các chữ cái có mặt trong dòng chữ "Không có gì quý hơn độc lập tự do".

2) Chỉ rõ các tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp.

H2

a) Xét tập hợp $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 3 \leq n \leq 20\}$. Hãy viết tập A bằng cách liệt kê các phần tử của nó.

b) Cho tập hợp $B = \{-15; -10; -5; 0; 5; 10; 15\}$. Hãy viết tập B bằng cách chỉ rõ các tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó.

Nói chung, khi nói đến tập hợp là nói đến các phần tử của nó. Tuy nhiên, người ta cũng xét cả tập hợp không chứa phần tử nào. Tập hợp như vậy gọi là **tập rỗng** và được kí hiệu là \emptyset .

2. Tập con và tập hợp bằng nhau

a) Tập con

|| Tập A được gọi là **tập con** của tập B và kí hiệu là $A \subset B$ nếu mọi phần tử của tập A đều là phần tử của tập B .

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Nếu $A \subset B$ thì ta còn nói tập A bị chứa trong tập B hay tập B chứa tập A và còn viết là $B \supset A$.

Từ định nghĩa tập con, dễ thấy tính chất bắc cầu sau

$$(A \subset B \text{ và } B \subset C) \Rightarrow (A \subset C).$$

Cũng dễ thấy mỗi tập hợp là tập con của chính nó.

Người ta coi \emptyset là tập con của mọi tập hợp, tức là $\emptyset \subset A$ với mọi tập A .

H3 Cho hai tập hợp $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ chia hết cho } 6\}$ và $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ chia hết cho } 12\}$. Hỏi $A \subset B$ hay $B \subset A$?

b) Tập hợp bằng nhau

Hai tập hợp A và B được gọi là **bằng nhau** và kí hiệu là $A = B$ nếu mỗi phần tử của A là một phần tử của B và mỗi phần tử của B cũng là một phần tử của A .

Từ định nghĩa này, ta có

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ và } B \subset A).$$

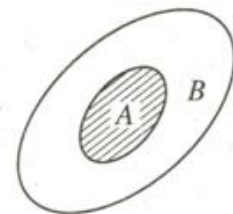
Hai tập hợp A và B không bằng nhau (hay khác nhau) được kí hiệu là $A \neq B$. Như vậy, hai tập hợp A và B khác nhau nếu có một phần tử của A không là phần tử của B hoặc có một phần tử của B không là phần tử của A .

H4 Xét định lí "Trong mặt phẳng, tập hợp các điểm cách đều hai mút của một đoạn thẳng là đường trung trực của đoạn thẳng đó".

Đây có phải là bài toán chứng minh hai tập hợp bằng nhau không? Nếu có, hãy nêu hai tập hợp đó.

c) Biểu đồ Ven

Các tập hợp có thể được minh họa trực quan bằng hình vẽ nhờ biểu đồ Ven do nhà toán học người Anh Giôn Ven (John Venn) lần đầu tiên đưa ra vào năm 1881. Trong biểu đồ Ven, người ta dùng những hình giới hạn bởi một đường khép kín để biểu diễn tập hợp.



Chẳng hạn, hình 1.1 thể hiện tập A là tập con của tập B .

Hình 1.1

Ví dụ 1. Chúng ta đã biết tập hợp số nguyên dương \mathbb{N}^* , tập hợp số tự nhiên \mathbb{N} , tập hợp số nguyên \mathbb{Z} , tập hợp số hữu tỉ \mathbb{Q} và tập hợp số thực \mathbb{R} .

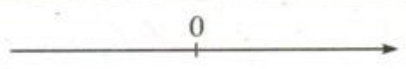








Ta có các quan hệ sau

$$\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

H5 Vẽ biểu đồ Ven mô tả các quan hệ trên.

3. Một số các tập con của tập hợp số thực

Trong các chương sau, ta thường sử dụng các tập con sau đây của tập số thực \mathbb{R} .

Tên gọi và kí hiệu	Tập hợp	Biểu diễn trên trục số (phần không bị gạch chéo)
Tập số thực $(-\infty ; +\infty)$	\mathbb{R}	
Đoạn $[a ; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
Khoảng $(a ; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
Nửa khoảng $[a ; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	
Nửa khoảng $(a ; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	
Nửa khoảng $(-\infty ; a]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	
Nửa khoảng $[a ; +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	
Khoảng $(-\infty ; a)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	
Khoảng $(a ; +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	

Trong các kí hiệu trên, kí hiệu $-\infty$ đọc là âm vô cực, kí hiệu $+\infty$ đọc là dương vô cực ; a và b được gọi là các đầu mút của đoạn, khoảng hay nửa khoảng.

H6 Hãy ghép mỗi ý ở cột trái với một ý ở cột phải có cùng một nội dung thành cặp.

a) $x \in [1 ; 5]$;	1) $1 < x \leq 5$;
b) $x \in (1 ; 5]$;	2) $x < 5$;
c) $x \in [5 ; +\infty)$;	3) $x \geq 5$;
d) $x \in (-\infty ; 5)$;	4) $1 \leq x \leq 5$;
	5) $1 < x < 5$.

4. Các phép toán trên tập hợp

a) Phép hợp

|| **Hợp** của hai tập hợp A và B , kí hiệu là $A \cup B$, là tập hợp bao gồm tất cả các phần tử thuộc A hoặc thuộc B .

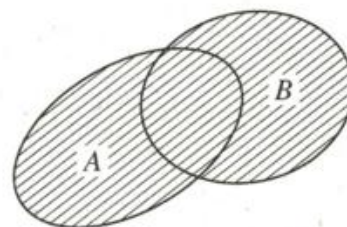
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}.$$

Trên biểu đồ Ven (h.1.2), phần gạch chéo biểu diễn hợp của hai tập hợp A và B .

Ví dụ 2. Cho đoạn $A = [-2 ; 1]$ và khoảng $B = (1 ; 3)$.

Ta có

$$A \cup B = [-2 ; 3). \quad \square$$



Hình 1.2

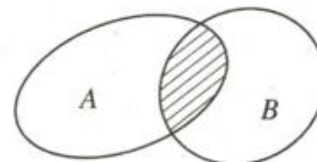
b) Phép giao

|| **Giao** của hai tập hợp A và B , kí hiệu là $A \cap B$, là tập hợp bao gồm tất cả các phần tử thuộc cả A và B .

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}.$$

Trên biểu đồ Ven (h.1.3), phần gạch chéo biểu diễn giao của hai tập hợp A và B .

Nếu hai tập hợp A và B không có phần tử chung, nghĩa là $A \cap B = \emptyset$ thì ta gọi A và B là hai tập hợp rời nhau.



Hình 1.3

Ví dụ 3. Cho nửa khoảng $A = (0 ; 2]$ và đoạn $B = [1 ; 4]$. Ta có

$$A \cap B = [1 ; 2]. \quad \square$$

H7 Gọi A là tập hợp các học sinh giỏi Toán của trường em, B là tập hợp các học sinh giỏi Văn của trường em. Hãy mô tả hai tập $A \cup B$ và $A \cap B$.

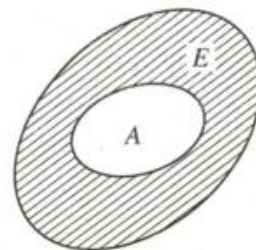
c) Phép lấy phần bù

Cho A là tập con của tập E . **Phần bù** của A trong E , kí hiệu là $C_E A^{(1)}$, là tập hợp tất cả các phần tử của E mà không là phần tử của A .

(1) C là chữ đầu tiên của từ tiếng Anh "complement" có nghĩa phần bù, bổ sung.

Trên biểu đồ Ven (h.1.4), phần gạch chéo biểu diễn phần bù của tập A trong E .

Ví dụ 4. Phần bù của tập các số tự nhiên trong tập các số nguyên là tập các số nguyên âm. Phần bù của tập các số lẻ trong tập các số nguyên là tập các số chẵn. \square



Hình 1.4

H8 a) Phần bù của tập số hữu tỉ \mathbb{Q} trong \mathbb{R} là tập nào ?

b) Giả sử A là tập hợp các học sinh nam trong lớp em, B là tập hợp các học sinh trong lớp em và D là tập hợp các học sinh nam trong trường em. Hãy mô tả các tập hợp : $C_B A$; $C_D A$.

CHÚ Ý

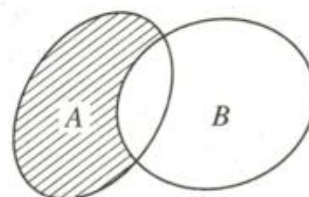
Với hai tập hợp A, B bất kì, người ta còn xét hiệu của hai tập hợp A và B .

|| **Hiệu** của hai tập hợp A và B , kí hiệu là $A \setminus B$, là tập hợp bao gồm tất cả các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B .

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}.$$

Trên biểu đồ Ven (h.1.5), phần gạch chéo biểu diễn hiệu của hai tập A và B .

Ví dụ 5. Cho nửa khoảng $A = (1 ; 3]$ và đoạn $B = [2 ; 4]$. Khi đó, $A \setminus B = (1 ; 2)$.



Hình 1.5

Từ định nghĩa ta thấy, nếu $A \subset E$ thì

$$C_E A = E \setminus A.$$

Câu hỏi và bài tập

22. Viết mỗi tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử của nó :

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (2x - x^2)(2x^2 - 3x - 2) = 0\}$;

b) $B = \{n \in \mathbb{N}^* \mid 3 < n^2 < 30\}$.

23. Viết mỗi tập hợp sau bằng cách chỉ rõ các tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó :

- a) $A = \{2; 3; 5; 7\}$; b) $B = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$;
 c) $C = \{-5; 0; 5; 10; 15\}$.

24. Xét xem hai tập hợp sau có bằng nhau không :

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-1)(x-2)(x-3) = 0\} \text{ và } B = \{5; 3; 1\}.$$

25. Giả sử $A = \{2; 4; 6\}$, $B = \{2; 6\}$, $C = \{4; 6\}$ và $D = \{4; 6; 8\}$. Hãy xác định xem tập nào là tập con của tập nào.

26. Cho A là tập hợp các học sinh lớp 10 đang học ở trường em và B là tập hợp các học sinh đang học môn Tiếng Anh của trường em. Hãy diễn đạt bằng lời các tập hợp sau :

- a) $A \cap B$; b) $A \setminus B$; c) $A \cup B$; d) $B \setminus A$.

27. Gọi A, B, C, D, E và F lần lượt là tập hợp các tứ giác lồi, tập hợp các hình thang, tập hợp các hình bình hành, tập hợp các hình chữ nhật, tập hợp các hình thoi và tập hợp các hình vuông. Hỏi tập nào là tập con của tập nào ? Hãy diễn đạt bằng lời tập $D \cap E$.

28. Cho $A = \{1; 3; 5\}$ và $B = \{1; 2; 3\}$. Tìm hai tập hợp $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ và $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Hai tập hợp nhận được là bằng nhau hay khác nhau ?

29. Điền dấu "x" vào ô trống thích hợp.

- | | | |
|---|-------------------------------|------------------------------|
| a) $\forall x \in \mathbb{R}, x \in (2,1; 5,4) \Rightarrow x \in (2; 5)$ | Đúng <input type="checkbox"/> | Sai <input type="checkbox"/> |
| b) $\forall x \in \mathbb{R}, x \in (2,1; 5,4) \Rightarrow x \in (2; 6)$ | Đúng <input type="checkbox"/> | Sai <input type="checkbox"/> |
| c) $\forall x \in \mathbb{R}, -1,2 \leq x < 2,3 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3$ | Đúng <input type="checkbox"/> | Sai <input type="checkbox"/> |
| d) $\forall x \in \mathbb{R}, -4,3 < x \leq -3,2 \Rightarrow -5 \leq x \leq -3$ | Đúng <input type="checkbox"/> | Sai <input type="checkbox"/> |

30. Cho đoạn $A = [-5; 1]$ và khoảng $B = (-3; 2)$. Tìm $A \cup B$ và $A \cap B$.

Luyện tập

31. Xác định hai tập hợp A và B , biết rằng :

$$A \setminus B = \{1; 5; 7; 8\}, B \setminus A = \{2; 10\} \text{ và } A \cap B = \{3; 6; 9\}.$$

32. Cho $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 9\}$, $B = \{0; 2; 4; 6; 8; 9\}$ và $C = \{3; 4; 5; 6; 7\}$. Hãy tìm $A \cap (B \setminus C)$ và $(A \cap B) \setminus C$. Hai tập hợp nhận được bằng nhau hay khác nhau ?

33. Cho A và B là hai tập hợp. Dùng biểu đồ Ven để kiểm nghiệm rằng :
- a) $(A \setminus B) \subset A$; b) $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$; c) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$.
34. Cho A là tập hợp các số tự nhiên chẵn không lớn hơn 10, $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 6\}$ và $C = \{n \in \mathbb{N} \mid 4 \leq n \leq 10\}$. Hãy tìm :
- a) $A \cap (B \cup C)$; b) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.
35. Điền dấu "x" vào ô trống thích hợp.
- a) $a \subset \{a; b\}$ Đúng Sai
- b) $\{a\} \subset \{a; b\}$ Đúng Sai .
36. Cho tập hợp $A = \{a; b; c; d\}$. Liệt kê tất cả các tập con của A có :
- a) Ba phần tử; b) Hai phần tử; c) Không quá một phần tử.
37. Cho hai đoạn $A = [a; a + 2]$ và $B = [b; b + 1]$. Các số a, b cần thoả mãn điều kiện gì để $A \cap B \neq \emptyset$?
38. Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau :
- (A) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}$; (B) $\mathbb{N}^* \cap \mathbb{R} = \mathbb{N}^*$.
- (C) $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$; (D) $\mathbb{N} \cup \mathbb{N}^* = \mathbb{Z}$.
39. Cho hai nửa khoảng $A = (-1; 0]$ và $B = [0; 1)$. Tìm $A \cup B$, $A \cap B$ và $C_{\mathbb{R}}A$.
40. Cho $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$;
- B là tập hợp các số nguyên có chữ số tận cùng là 0, 2, 4, 6, 8 ;
- $C = \{n \in \mathbb{Z} \mid n = 2k - 2, k \in \mathbb{Z}\}$;
- $D = \{n \in \mathbb{Z} \mid n = 3k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$.
- Chứng minh rằng $A = B$, $A = C$ và $A \neq D$.
41. Cho hai nửa khoảng $A = (0; 2]$, $B = [1; 4)$. Tìm $C_{\mathbb{R}}(A \cup B)$ và $C_{\mathbb{R}}(A \cap B)$.
42. Cho $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d\}$, $C = \{b, c, e\}$.
- Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau :
- (A) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$; (B) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
- (C) $(A \cup B) \cap C = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; (D) $(A \cap B) \cup C = (A \cup B) \cap C$.



TIỂU SỬ NHÀ TOÁN HỌC CAN-TO



Ghê-oóc Can-to
(Georg Cantor, 1845 – 1918)

Can-to sinh ngày 3-3-1845 tại Xanh Pê-tec-bua trong một gia đình có bố là một thương gia, mẹ là một nghệ sĩ. Tài năng và lòng say mê toán học của ông hình thành rất sớm. Sau khi tốt nghiệp phổ thông một cách xuất sắc, ông ôm ấp hoài bão đi sâu vào toán học. Bố của ông muốn ông trở thành một kĩ sư vì nghề này kiếm được nhiều tiền hơn. Nhưng ông đã quyết tâm học sâu về toán và cuối cùng, ông thuyết phục được cha bằng lòng cho ông theo học ngành Toán. Ông viết thư cho cha đại ý như sau : "Con rất sung sướng vì cha đã đồng ý cho con theo đuổi hoài bão của con. Tâm hồn con, cơ thể con sống theo hoài bão ấy". Ông bảo vệ luận án Tiến sĩ tại trường đại học Bec-lin vào năm 1867. Từ năm 1869 đến 1905, ông dạy ở trường đại học Ha-lơ (Halle). Ông là người sáng lập nên lí thuyết tập hợp. Ngay sau khi ra đời, lí thuyết tập hợp đã là cơ sở cho một cuộc cách mạng trong viết sách và giảng dạy toán. Những công trình toán học của ông đã để lại dấu ấn sâu sắc cho các thế hệ các nhà toán học lớp sau. Năm 1925, Hin-be (D. Hilbert), nhà toán học lỗi lạc của thế kỉ XX đã viết : "Tôi đã tìm thấy trong các công trình của ông vẻ đẹp của hoa và trí tuệ. Tôi nghĩ rằng đó là đỉnh cao của hoạt động trí tuệ của con người". Từ năm 40 tuổi, tuy có những thời kì đau ốm phải nằm viện nhưng ông vẫn không ngừng sáng tạo. Một trong những công trình quan trọng của ông đã được hoàn thành trong khoảng thời gian giữa hai cơn đau. Ông mất ngày 6-1-1918 tại một bệnh viện ở Ha-lơ, thọ 73 tuổi.