

**1. Bảng phân bố tần số - tần suất**

**Ví dụ 1.** Khi điều tra về năng suất của một giống lúa mới, điều tra viên ghi lại năng suất (tạ/ha) của giống lúa đó trên 120 thửa ruộng có cùng diện tích 1ha. Xem xét mẫu số liệu này, điều tra viên nhận thấy :

10 thửa ruộng cùng có năng suất 30 ;  
 20 thửa ruộng cùng có năng suất 32 ;  
 30 thửa ruộng cùng có năng suất 34 ;  
 15 thửa ruộng cùng có năng suất 36 ;  
 10 thửa ruộng cùng có năng suất 38 ;  
 10 thửa ruộng cùng có năng suất 40 ;  
 5 thửa ruộng cùng có năng suất 42 ;  
 20 thửa ruộng cùng có năng suất 44.

Trong mẫu số liệu trên chỉ có tám giá trị khác nhau là : 30 ; 32 ; 34 ; 36 ; 38 ; 40 ; 42 ; 44. Mỗi giá trị này xuất hiện một số lần trong mẫu số liệu.  $\square$

|| Số lần xuất hiện của mỗi giá trị trong mẫu số liệu được gọi là **tần số** của giá trị đó.

Ta có thể trình bày gọn gàng mẫu số liệu trên trong *bảng phân bố tần số* (gọi tắt là *bảng tần số*) sau đây.

<b>Giá trị (x)</b>	30	32	34	36	38	40	42	44	
<b>Tần số (n)</b>	10	20	30	15	10	10	5	20	$N = 120$

*Bảng 1*

Nếu muốn biết trong 120 thửa ruộng, có bao nhiêu phần trăm thửa ruộng có năng suất 30, 32, ... ta sẽ phải tính thêm tần suất của mỗi giá trị.

|| **Tần suất**  $f_i$  của giá trị  $x_i$  là tỉ số giữa tần số  $n_i$  và kích thước mẫu  $N$

$$f_i = \frac{n_i}{N}.$$

Người ta thường viết tần suất dưới dạng phần trăm.

Bổ sung thêm một hàng tần suất vào bảng 1, ta nhận được *bảng phân bố tần số - tần suất* (gọi tắt là *bảng tần số - tần suất*) sau đây.

<b>Giá trị</b>	30	32	34	36	38	40	42	44	
<b>Tần số</b>	10	20	30	15	10	10	5	20	$N = 120$
<b>Tần suất %</b>	8,3	16,7	25,0	12,5	8,3	8,3	4,2	16,7	

*Bảng 2*

### CHÚ Ý

- Trên hàng tần số, người ta thường dành một ô để ghi kích thước mẫu  $N$ . Kích thước mẫu  $N$  bằng tổng các tần số.
- Có thể viết bảng tần số - tần suất dạng "ngang" (như bảng 2) thành bảng "dọc" (chuyển hàng thành cột như bảng 3).

**H1** Thống kê điểm thi môn Toán trong kì thi vừa qua của 400 em học sinh cho ta bảng sau đây.

Điểm bài thi	Tần số	Tần suất (%)
0	...	1,50
1	15	3,75
2	43	10,75
3	53	13,25
4	85	21,25
5	...	18,00
6	55	...
7	33	...
8	18	...
9	10	...
10	10	...
$N = 400$		

Bảng 3

Điền tiếp các số vào các chỗ trống (...) ở cột tần số và cột tần suất trong bảng 3.

## 2. Bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp

**Ví dụ 2.** Chọn 36 học sinh nam của một trường THPT và đo chiều cao của họ, ta thu được mẫu số liệu sau (đơn vị : cm).

160 161 161 162 162 162 163 163 163 164 164 164 164  
 165 165 165 165 165 166 166 166 166 167 167 168 168  
 168 168 169 169 170 171 171 172 172 174.

Để trình bày mẫu số liệu (theo một tiêu chí nào đó) được gọn gàng, súc tích, nhất là khi có nhiều số liệu, ta thực hiện việc *ghép số liệu thành các lớp*. Ở đây, ta ghép các số liệu trên thành năm lớp theo các đoạn có độ dài bằng nhau. Lớp thứ nhất gồm các học sinh có chiều cao nằm trong đoạn  $[160 ; 162]$ , lớp thứ hai gồm các học sinh có chiều cao nằm trong đoạn  $[163 ; 165]$ , ... . Khi đó, ta sẽ có một bảng như sau :

Lớp	Tần số
$[160 ; 162]$	6
$[163 ; 165]$	12
$[166 ; 168]$	10
$[169 ; 171]$	5
$[172 ; 174]$	3
$N = 36$	

Bảng 4

Trong bảng 4, *tần số của mỗi lớp* là số học sinh trong lớp đó.

Bảng 4 được gọi là *bảng phân bố tần số ghép lớp* (gọi tắt là *bảng tần số ghép lớp*).

Bổ sung một cột tần suất vào bảng 4, ta nhận được bảng 5 sau

Lớp	Tần số	Tần suất (%)
[160 ; 162]	6	16,7
[163 ; 165]	12	33,3
[166 ; 168]	10	...
[169 ; 171]	5	...
[172 ; 174]	3	...
	$N = 36$	

Bảng 5

Bảng 5 được gọi là *bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp* (gọi tắt là *bảng tần số - tần suất ghép lớp*).

**H2** Hãy điền các số vào chỗ trống (...) ở cột tần suất trong bảng 5.

Trong nhiều trường hợp, ta ghép lớp theo các nửa khoảng sao cho mút bên phải của một nửa khoảng cũng là mút bên trái của nửa khoảng tiếp theo. Chẳng hạn, trong ví dụ 2, ta có thể ghép các số liệu thành năm lớp với các nửa khoảng [159,5 ; 162,5) ; [162,5 ; 165,5) ; ... . Ta có bảng sau

Lớp	Tần số	Tần suất (%)
[159,5 ; 162,5)	6	16,7
[162,5 ; 165,5)	12	33,3
[165,5 ; 168,5)	10	27,8
[168,5 ; 171,5)	5	...
[171,5 ; 174,5)	3	...
	$N = 36$	

Bảng 6

### 3. Biểu đồ

Tục ngữ có những câu : "Trăm nghe không bằng một thấy" ; "Một hình ảnh giá trị hơn ngàn lời nói". Để trình bày mẫu số liệu một cách trực quan sinh

động, dễ nhớ và gây ấn tượng, người ta sử dụng biểu đồ. Sau đây là một số biểu đồ thông dụng nhất.

### a) Biểu đồ tần số, tần suất hình cột

Biểu đồ hình cột là một cách thể hiện rất tốt bảng phân bố tần số (hay tần suất) ghép lớp.

**Ví dụ 3.** Xét bảng phân bố tần số (bảng 4) chiều cao của 36 học sinh trong ví dụ 2. Hình 5.1 là biểu đồ tần số hình cột thể hiện bảng 4 với cách vẽ như sau : Vẽ hai đường thẳng vuông góc.

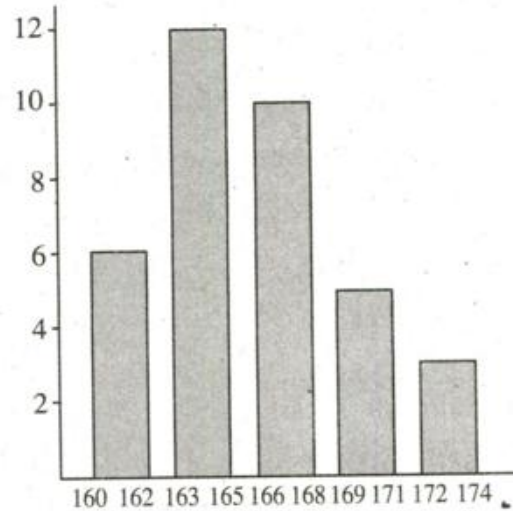
Trên đường thẳng nằm ngang (dùng làm trục số), ta đánh dấu các đoạn xác định lớp, bắt đầu từ đoạn  $[160 ; 162]$  cho tới đoạn  $[172 ; 174]$ .

Tại mỗi đoạn, ta dựng lên một cột hình chữ nhật với đáy là đoạn đó, còn chiều cao bằng tần số của lớp mà đoạn đó xác định.

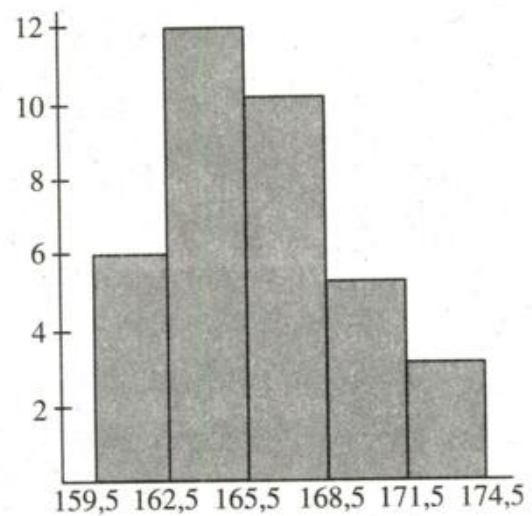
Hình thu được đó là **biểu đồ tần số hình cột**. □

• Đối với cách ghép lớp như ở bảng 6, ta thể hiện bảng phân bố tần số bằng biểu đồ hình cột như hình 5.2. Trong trường hợp này giữa các cột không có "khe hở".

Chúng ta cũng có thể dùng biểu đồ hình cột để thể hiện bảng tần suất ghép lớp gọi là **biểu đồ tần suất hình cột**. Trong trường hợp này, cột hình chữ nhật sẽ có chiều cao bằng tần suất (tính theo %).



Hình 5.1



Hình 5.2

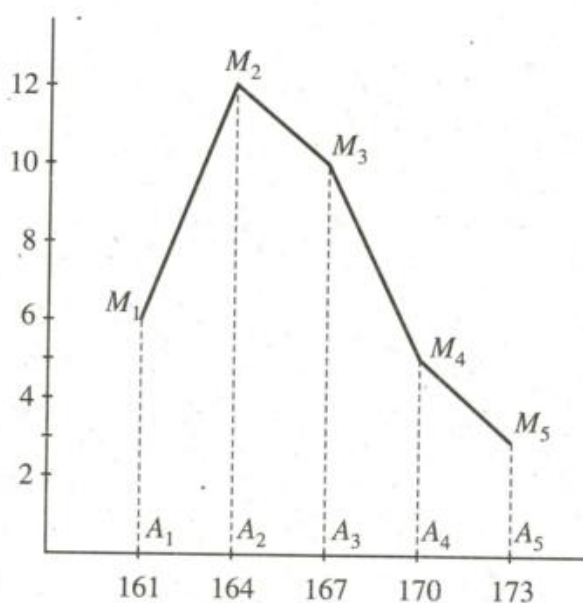
**H3** Hãy vẽ biểu đồ tần suất hình cột thể hiện bảng 5.

### b) Đường gấp khúc tần số, tần suất

Bảng phân bố tần số ghép lớp cũng có khi được thể hiện bằng một biểu đồ khác gọi là **đường gấp khúc tần số**.

**Ví dụ 4.** Xét bảng phân bố tần số trong ví dụ 2 (bảng 4). Đường gấp khúc tần số thể hiện bảng 4 được vẽ như sau (h.5.3) :

Ta vẽ hai đường thẳng vuông góc. Trên đường thẳng nằm ngang (dùng làm trục số), ta đánh dấu các điểm  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ , ở đó  $A_i$  là trung điểm của đoạn (hoặc nửa khoảng) xác định lớp thứ  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ). Tại mỗi điểm  $A_i$ , ta dựng đoạn thẳng  $A_iM_i$  vuông góc với đường thẳng nằm ngang và có độ dài bằng tần số của lớp thứ  $i$ ; cụ thể là  $A_1M_1 = 6, \dots, A_5M_5 = 3$ . Vẽ các đoạn thẳng  $M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4, M_4M_5$ , ta được một đường gấp khúc. Đó là **đường gấp khúc tần số** thể hiện bảng 4.  $\square$



Hình 5.3

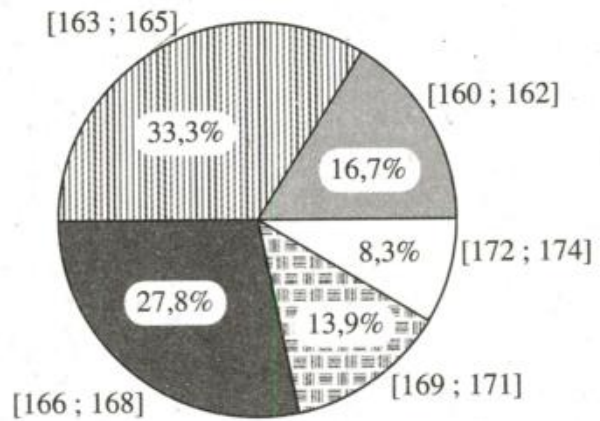
- Nếu độ dài đoạn thẳng  $A_iM_i$  được lấy bằng tần suất của lớp thứ  $i$  thì khi vẽ các đoạn thẳng  $M_1M_2, M_2M_3, \dots, M_4M_5$ , ta được một đường gấp khúc gọi là **đường gấp khúc tần suất**.

**H4** Hãy điền các số vào chỗ trống trong bảng 6 rồi vẽ đường gấp khúc tần suất thể hiện bảng đó.

### c) Biểu đồ tần suất hình quạt

Biểu đồ hình quạt rất thích hợp cho việc thể hiện bảng phân bố tần suất ghép lớp. Hình tròn được chia thành những hình quạt. Mỗi lớp được tương ứng với một hình quạt mà diện tích của nó tỉ lệ với tần suất của lớp đó.

**Ví dụ 5.** Hình 5.4 là biểu đồ tần suất hình quạt thể hiện bảng 5. Cách vẽ như sau : Lớp thứ nhất [160 ; 162] chiếm  $\frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 16,7\%$  của kích thước mẫu. Do đó, hình quạt tương ứng sẽ chiếm  $\frac{1}{6}$  hình tròn. Số đo góc của hình quạt này là  $\frac{1}{6}$  của  $360^\circ$ , tức là  $60^\circ$ . Ta dùng

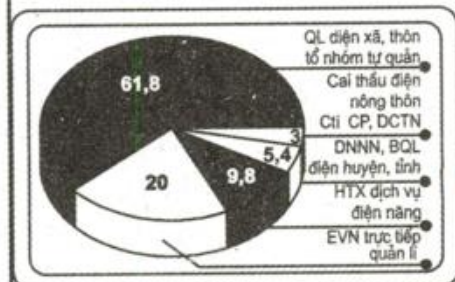
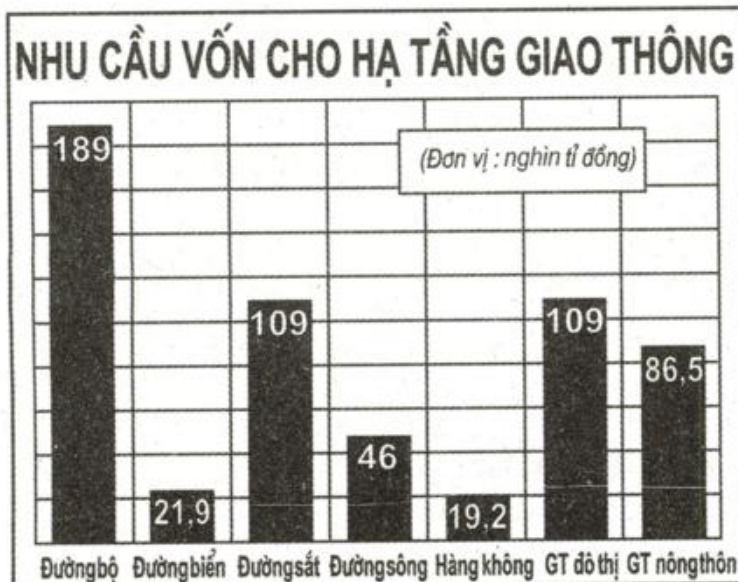


Hình 5.4

thước đo góc để dựng hình quạt nói trên. Tương tự, ta dựng hình quạt cho các lớp còn lại. Hình thu được gọi là **biểu đồ tần suất hình quạt** thể hiện bảng 5. □

### CHÚ Ý

Các biểu đồ hình cột và biểu đồ hình quạt được sử dụng không chỉ nhằm minh họa bằng hình ảnh bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp mà còn được sử dụng rộng rãi trong việc minh họa các số liệu thống kê ở các tình huống khác. Xem các biểu đồ dưới đây trích ra từ *Thời báo kinh tế Việt Nam* 16-12-2002.



Cơ cấu quản lí kinh doanh điện nông thôn (%)

## Câu hỏi và bài tập

3. Trong một giải bóng đá học sinh, người ta tổ chức một cuộc thi dự đoán kết quả của 25 trận đáng chú ý nhất. Sau đây là số phiếu dự đoán đúng của 25 trận mà ban tổ chức nhận được :

54 75 121 142 154 159 171 189 203 211 225 247 251  
259 264 278 290 305 315 322 355 367 388 450 490.

Hãy lập bảng tần số - tần suất ghép lớp gồm sáu lớp : lớp đầu tiên là đoạn  $[50 ; 124]$ , lớp thứ hai là đoạn  $[125 ; 199]$ , ... (độ dài mỗi đoạn là 74).

4. Một trạm kiểm soát giao thông ghi tốc độ (km/h) của 30 chiếc xe ô tô đi qua trạm như sau :

53 47 59 66 36 69 83 77 42 57 51 60 78 63 46  
63 42 55 63 48 75 60 58 80 44 59 60 75 49 63.

Hãy lập bảng tần số - tần suất ghép lớp (chính xác đến hàng phần nghìn) gồm sáu lớp : lớp đầu tiên là đoạn  $[36 ; 43]$ , lớp thứ hai là đoạn  $[44 ; 51]$ , ... (độ dài mỗi đoạn là 7).

5. Điều tra về số đĩa *CD* của 80 gia đình, điều tra viên thu được bảng tần số - tần suất sau :

Lớp	Tần số	Tần suất (%)
[1 ; 10]	5	6,25
[11 ; 20]	29	...
[21 ; 30]	21	...
[31 ; 40]	16	...
[41 ; 50]	7	...
[51 ; 60]	2	...
$N = 80$		

- a) Điền các số vào chỗ trống (...) ở cột tần suất.
- b) Vẽ biểu đồ tần số hình cột.
- c) Vẽ biểu đồ tần suất hình cột.
- d) Vẽ biểu đồ tần suất hình quạt.



## Luyện tập

6. Doanh thu của 50 cửa hàng của một công ti trong một tháng như sau (đơn vị : triệu đồng)

120 121 129 114 95 88 109 147 118 148 128 71 93 67 62  
57 103 135 97 166 83 114 66 156 88 64 49 101 79 120  
75 113 155 48 104 112 79 87 88 141 55 123 152 60 83  
144 84 95 90 27.

- a) Dấu hiệu, đơn vị điều tra ở đây là gì ?  
b) Lập bảng tần số - tần suất ghép lớp gồm bảy lớp : lớp đầu tiên là nửa khoảng  $[26,5 ; 48,5)$ , lớp tiếp theo là nửa khoảng  $[48,5 ; 70,5)$ , ... (độ dài mỗi nửa khoảng là 22).  
c) Vẽ biểu đồ tần số hình cột.
7. Một cuộc điều tra 50 nhà nhiếp ảnh nghiệp dư với câu hỏi : "Trong tháng trước anh (chị) sử dụng hết bao nhiêu cuộn phim ?" cho kết quả như sau :

5 3 3 1 4 3 4 3 6 8 4 5 3 4 2 4 7  
6 5 9 6 6 6 7 0 11 3 12 4 7 14 0 2 4  
4 3 5 15 0 10 4 5 2 3 5 1 8 1 2 12.

- a) Dấu hiệu, đơn vị điều tra ở đây là gì ?  
b) Lập bảng tần số ghép lớp, với lớp đầu tiên là đoạn  $[0 ; 2]$ , lớp tiếp theo là đoạn  $[3 ; 5]$ , ..., lớp cuối cùng là đoạn  $[15 ; 17]$  (độ dài mỗi đoạn là 2).  
c) Vẽ biểu đồ tần số hình cột.
8. Một thư viện thống kê số người đến đọc sách vào buổi tối trong 30 ngày của tháng vừa qua như sau :

85 81 65 58 47 30 51 92 85 42 55 37 31 82 63  
33 44 93 77 57 44 74 63 67 46 73 52 53 47 35.

- a) Lập bảng tần số - tần suất ghép lớp (chính xác đến hàng phần trăm), với lớp đầu tiên là đoạn  $[25 ; 34]$ , lớp tiếp theo là đoạn  $[35 ; 44]$ , ..., lớp cuối cùng là đoạn  $[85 ; 94]$  (độ dài mỗi đoạn là 9).  
b) Vẽ biểu đồ tần suất hình cột.