

**§1. Lũy thừa**

**A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ**

**1. Lũy thừa với số mũ nguyên**

- Lũy thừa với số mũ nguyên dương

Cho  $a \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Khi đó

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ thừa số}}$$

- Lũy thừa với số mũ nguyên âm, lũy thừa với số mũ 0

Cho  $a \neq 0$ . Khi đó

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}; \quad a^0 = 1.$$

- Lũy thừa với số mũ nguyên có các tính chất tương tự tính chất của lũy thừa với số mũ nguyên dương.

- $0^0$  và  $0^{-n}$  không có nghĩa.

**2. Căn bậc  $n$**

Cho số thực  $b$  và số nguyên dương  $n \geq 2$ .

Số  $a$  được gọi là căn bậc  $n$  của số  $b$  nếu  $a^n = b$ .

Khi  $n$  lẻ,  $b \in \mathbb{R}$ : Tồn tại duy nhất  $\sqrt[n]{b}$ ;

$b < 0$ : Không tồn tại căn bậc  $n$  của  $b$ ;

Khi  $n$  chẵn và  $b = 0$ : Có một căn  $\sqrt[n]{0} = 0$ ;

$b > 0$ : Có hai căn  $\begin{cases} \sqrt[n]{b} > 0 \\ -\sqrt[n]{b} < 0. \end{cases}$

### 3. Luỹ thừa với số mũ hữu tỉ

Cho số thực  $a > 0$  và số hữu tỉ  $r = \frac{m}{n}$ , trong đó  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .

Khi đó

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

### 4. Luỹ thừa với số mũ vô tỉ

Giả sử  $a$  là một số dương,  $\alpha$  là một số vô tỉ và  $(r_n)$  là một dãy số hữu tỉ sao cho  $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \alpha$ . Khi đó

$$a^\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{r_n}.$$

### 5. Các tính chất

Cho hai số dương  $a, b$ ;  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Khi đó :

$$* a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}; \quad \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta};$$

$$* (ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha;$$

$$* \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}; \quad (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta};$$

\* Nếu  $a > 1$  thì  $a^\alpha > a^\beta$  khi và chỉ khi  $\alpha > \beta$ .

\* Nếu  $0 < a < 1$  thì  $a^\alpha > a^\beta$  khi và chỉ khi  $\alpha < \beta$ .

## B. VÍ DỤ

#### • Ví dụ 1

Tính :

$$a) \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}};$$

$$b) (0,04)^{-1,5} - (0,125)^{-\frac{2}{3}};$$

$$c) 8^{\frac{9}{7}} : 8^{\frac{2}{7}} - 3^{\frac{6}{5}} \cdot 3^{\frac{4}{5}};$$

$$d) \left(5^{-\frac{2}{5}}\right)^{-5} + \left((0,2)^{\frac{3}{4}}\right)^{-4}.$$

**Giải**

a)  $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}} = (2^{-4})^{-\frac{3}{4}} + (2^{-3})^{-\frac{4}{3}} = 2^3 + 2^4 = 8 + 16 = 24.$

b)  $(0,04)^{-1,5} - (0,125)^{-\frac{2}{3}} = (0,2^2)^{-\frac{3}{2}} - (0,5^3)^{-\frac{2}{3}}$   
 $= (0,2)^{-3} - (0,5)^{-2} = 125 - 4 = 121.$

c)  $8^{\frac{9}{7}} : 8^{\frac{2}{7}} - 3^{\frac{6}{5}} \cdot 3^{\frac{4}{5}} = 8^{\frac{7}{7}} - 3^{\frac{10}{5}} = 8 - 9 = -1.$

d)  $\left(5^{-\frac{2}{5}}\right)^{-5} + \left((0,2)^{\frac{3}{4}}\right)^{-4} = 5^2 + (0,2)^{-3} = 25 + 125 = 150.$

• **Ví dụ 2**

Cho  $a, b$  là các số dương. Hãy viết và rút gọn các biểu thức sau dưới dạng lũy thừa :

a)  $a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{a}$  ;

b)  $b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{b}$  ;

c)  $a^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{a}$  ;

d)  $\sqrt[3]{b} : b^{\frac{1}{6}}$ .

**Giải**

Với  $a, b$  là các số dương, ta có :

a)  $a^{\frac{1}{3}} \sqrt{a} = a^{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{6}}.$

b)  $b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{b} = b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{6}} = b^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = b.$

c)  $a^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{a} = a^{\frac{4}{3}} : a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{4}{3} - \frac{1}{3}} = a.$

d)  $\sqrt[3]{b} : b^{\frac{1}{6}} = b^{\frac{1}{3}} : b^{\frac{1}{6}} = b^{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}} = b^{\frac{1}{6}}.$

• **Ví dụ 3**

Tính giá trị của biểu thức :

a)  $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a}$  với  $a = 0,09$  ;

b)  $\sqrt{b} : \sqrt[6]{b}$  với  $b = 27$  ;

c)  $\frac{\sqrt{b} \cdot \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[6]{b}}$  với  $b = 1,3$  ;

d)  $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[12]{a^5}$  với  $a = 2,7.$

### Giải

Do các giá trị của  $a$  và  $b$  đã cho là những số dương nên ta có :

$$\text{a) } \sqrt[3]{a} \sqrt[6]{a} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{2}} = (0,09)^{\frac{1}{2}} = 0,3.$$

$$\text{b) } \sqrt{b} : \sqrt[6]{b} = b^{\frac{1}{2}} : b^{\frac{1}{6}} = b^{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}} = b^{\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{3}} = 3.$$

$$\text{c) } \frac{\sqrt{b} \cdot \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[6]{b}} = \frac{b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{1}{6}}} = b^{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6}} = b = 1,3.$$

$$\text{d) } \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[12]{a^5} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{5}{12}} = a = 2,7.$$

#### • Ví dụ 4

Tính :

$$\text{a) } 4^{3+\sqrt{2}} \cdot 2^{1-\sqrt{2}} \cdot 2^{-4-\sqrt{2}} ;$$

$$\text{b) } \frac{6^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}} \cdot 3^{1+\sqrt{5}}} ;$$

$$\text{c) } (25^{1+\sqrt{2}} - 5^{2\sqrt{2}}) \cdot 5^{-1-2\sqrt{2}}.$$

### Giải

$$\begin{aligned} \text{a) } 4^{3+\sqrt{2}} \cdot 2^{1-\sqrt{2}} \cdot 2^{-4-\sqrt{2}} &= 2^{2(3+\sqrt{2})} \cdot 2^{1-\sqrt{2}} \cdot 2^{-4-\sqrt{2}} \\ &= 2^{6+2\sqrt{2}+1-\sqrt{2}-4-\sqrt{2}} = 2^3 = 8. \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{6^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}} \cdot 3^{1+\sqrt{5}}} = \frac{2^{3+\sqrt{5}} \cdot 3^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}} \cdot 3^{1+\sqrt{5}}} = 2 \cdot 3^2 = 18.$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (25^{1+\sqrt{2}} - 5^{2\sqrt{2}}) \cdot 5^{-1-2\sqrt{2}} &= (5^{2+2\sqrt{2}} - 5^{2\sqrt{2}}) \cdot 5^{-1-2\sqrt{2}} = \\ &= 5^{2+2\sqrt{2}-1-2\sqrt{2}} - 5^{2\sqrt{2}-1-2\sqrt{2}} = 5 - 5^{-1} = 5 - \frac{1}{5} = \frac{24}{5}. \end{aligned}$$

#### • Ví dụ 5

Hãy so sánh các cặp số sau :

$$\text{a) } 4^{-\sqrt{3}} \text{ và } 4^{-\sqrt{2}} ;$$

$$\text{b) } 2^{\sqrt{3}} \text{ và } 2^{1,7} ;$$

$$\text{c) } \left(\frac{1}{2}\right)^{1,4} \text{ và } \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}} ;$$

$$\text{d) } \left(\frac{1}{9}\right)^{\pi} \text{ và } \left(\frac{1}{9}\right)^{3,14}.$$

### Giải

a) Ta có số mũ  $-\sqrt{3} < -\sqrt{2}$  và cơ số  $4 > 1$  nên  $4^{-\sqrt{3}} < 4^{-\sqrt{2}}$ .

b) Tương tự,  $\sqrt{3} > 1,7$  và  $2 > 1$  nên  $2^{\sqrt{3}} > 2^{1,7}$ .

c) Vì  $1,4 < \sqrt{2}$  và cơ số  $\frac{1}{2} < 1$  nên  $\left(\frac{1}{2}\right)^{1,4} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$ .

d) Tương tự,  $\pi > 3,14$  và  $\frac{1}{9} < 1$  nên  $\left(\frac{1}{9}\right)^{\pi} < \left(\frac{1}{9}\right)^{3,14}$ .

#### • Ví dụ 6

Cho  $a, b$  là các số dương. Rút gọn các biểu thức sau :

$$\text{a) } \left(1 - 2\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{b}{a}\right) : \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)^2 ; \quad \text{b) } \frac{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{9}{4}}}{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{5}{4}}} - \frac{b^{-\frac{1}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}}}$$

### Giải

Với  $a, b$  là các số dương, ta có :

$$\begin{aligned} \text{a) } \left(1 - 2\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{b}{a}\right) : \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)^2 &= \left(1 - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 : (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)^2 : (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{9}{4}}}{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{5}{4}}} - \frac{b^{-\frac{1}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}}} &= \frac{a^{\frac{1}{4}}(1 - a^2)}{a^{\frac{1}{4}}(1 - a)} - \frac{b^{-\frac{1}{2}}(1 - b^2)}{b^{-\frac{1}{2}}(b + 1)} \\ &= \frac{(1 - a)(1 + a)}{1 - a} - \frac{(1 - b)(1 + b)}{b + 1} = a + b. \end{aligned}$$

#### • Ví dụ 7

Hãy so sánh các cặp số sau :

a)  $\sqrt[3]{10}$  và  $\sqrt[5]{20}$  ;

b)  $\sqrt[4]{5}$  và  $\sqrt[3]{7}$ .

### Giải

a) Đưa hai căn đã cho về cùng căn bậc 15, ta được

$$\sqrt[3]{10} = \sqrt[15]{10^5} = \sqrt[15]{100000},$$

$$\sqrt[5]{20} = \sqrt[15]{20^3} = \sqrt[15]{8000}.$$

Do  $100\,000 > 8000$  nên  $\sqrt[3]{10} > \sqrt[5]{20}$ .

b) Tương tự, ta có

$$\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125},$$

$$\sqrt[3]{7} = \sqrt[12]{7^4} = \sqrt[12]{2401}.$$

Vậy  $\sqrt[4]{5} < \sqrt[3]{7}$ .

## C. BÀI TẬP

2.1. Tính :

a)  $2^{2-3\sqrt{5}} \cdot 8^{\sqrt{5}}$  ;

b)  $3^{1+2\sqrt[3]{2}} : 9^{\sqrt[3]{2}}$  ;

c)  $\frac{10^{2+\sqrt{7}}}{2^{2+\sqrt{7}} \cdot 5^{1+\sqrt{7}}}$  ;

d)  $(4^{2\sqrt{3}} - 4^{\sqrt{3}-1}) \cdot 2^{-2\sqrt{3}}$ .

2.2. Tính :

a)  $\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}} + 810000^{0,25} - \left(7\frac{19}{32}\right)^{\frac{1}{5}}$  ;

b)  $(0,001)^{-\frac{1}{3}} - 2^{-2} \cdot 64^{\frac{2}{3}} - 8^{-1\frac{1}{3}}$  ;

c)  $27^{\frac{2}{3}} - (-2)^{-2} + \left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$  ;

d)  $(-0,5)^{-4} - 625^{0,25} - \left(2\frac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}}$ .

2.3. Cho  $a$  và  $b$  là các số dương. Đơn giản các biểu thức sau :

a)  $\frac{a^{\frac{4}{3}} \left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}} \left(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}}\right)}$  ;

b)  $\frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}$  ;

c)  $(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{ab}\right)$  ;

d)  $\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right) : \left(2 + \sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)$ .

**2.4.** Hãy so sánh mỗi số sau với 1 :

a)  $2^{-2}$  ;

b)  $(0,013)^{-1}$  ;

c)  $\left(\frac{2}{7}\right)^5$  ;

d)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$  ;

e)  $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\sqrt{5}-2}$  ;

g)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}-3}$  .

**2.5.** Hãy so sánh các cặp số sau :

a)  $\sqrt{17}$  và  $\sqrt[3]{28}$  ;

b)  $\sqrt[4]{13}$  và  $\sqrt[5]{23}$  ;

c)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}$  và  $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$  ;

d)  $4^{\sqrt{5}}$  và  $4^{\sqrt{7}}$  .