

LỜI GIẢI - HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ CHƯƠNG III

§1

- 3.1. a) Hàm số $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ là một nguyên hàm của $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.
- b) Hàm số $g(x) = e^{\sin x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{\sin x} \cos x$.

c) Hàm số $f(x) = \sin^2 \frac{1}{x}$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x) = -\frac{1}{x^2} \sin \frac{2}{x}$.

d) Hàm số $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$.

e) Hàm số $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x) = (2x-1)e^{\frac{1}{x}}$.

3.2. a) Vì $F(x) = \frac{x^2 + 6x + 1}{2x - 3} = \frac{x^2 + 10}{2x - 3} + 3 = G(x) + 3$, nên $F(x)$ và $G(x)$ đều là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{2x^2 - 6x - 20}{(2x - 3)^2}$.

b) Vì $G(x) = 10 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} + 9 = F(x) + 9$, nên $F(x)$ và $G(x)$ đều là một nguyên hàm của $f(x) = -\frac{2 \cos x}{\sin^3 x}$.

c) Vì $F'(x) = (5 + 2 \sin^2 x)' = 2 \sin 2x$ và $G'(x) = (1 - \cos 2x)' = 2 \sin 2x$, nên $F(x)$ và $G(x)$ đều là nguyên hàm của cùng hàm số $f(x) = 2 \sin 2x$.

3.3. a) $F(x) = \frac{(x-9)^5}{5} + C$; b) $F(x) = \frac{1}{2-x} + C$;

c) $F(x) = -\sqrt{1-x^2} + C$; d) $F(x) = \sqrt{2x+1} + C$;

e) $F(x) = 2(\tan x - x) + C$. HD: Vì $f(x) = 2 \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 2 \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right)$;

g) $F(x) = \ln(x^2 + x + 1) + C$. HD: Đặt $u = x^2 + x + 1$, ta có $u' = 2x + 1$.

3.4. a) $\frac{1}{4}(1+x^3)^{\frac{4}{3}} + C$;

b) $-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$;

c) $-\frac{1}{2(1+x^2)} + C$;

d) $\ln \left| \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right| + C$;

e) $\cos \frac{1}{x} + C$;

g) $\frac{1}{3}(\ln x)^3 + C$;

h) $-3 \sqrt[3]{\cos x} + C$;

i) $\frac{1}{4} \sin^4 x + C$;

k) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right| + C$;

l) $2\sqrt{\sin x - \cos x} + C$.

- 3.5. a) $(3 - 2x)e^x + C$; b) $-(1 + x)e^{-x} + C$;
- c) $\frac{x^2}{2} \ln(1 - x) - \frac{1}{2} \ln(1 - x) - \frac{1}{4}(1 + x)^2 + C$;
- d) $\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x + C$. *HD*: Đặt $u = x$, $dv = \sin^2 x dx$.
- e) $x \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2} + C$. *HD*: Đặt $u = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ và $dv = dx$.
- g) $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \left((\ln x)^2 - \frac{4}{3} \ln x + \frac{8}{9} \right) + C$. *HD*: Đặt $u = \ln^2 x$, $dv = \sqrt{x} dx$.
- h) $x - \frac{1 - x^2}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x} + C$. *HD*: Đặt $u = \ln \frac{1 + x}{1 - x}$, $dv = x dx$.
- 3.6. a) $(3 - x)^6 \left(\frac{3 - x}{7} - \frac{1}{2} \right) + C$. *HD*: Đặt $t = 3 - x$;
- b) $\frac{4^x}{\ln 4} - 2 \frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + C$;
- c) $-\frac{8 + 30x}{375} (2 - 5x)^{\frac{3}{2}} + C$. *HD*: Dựa vào $x = -\frac{1}{5}(2 - 5x) + \frac{2}{5}$;
- d) $\tan x [\ln(\cos x) + 1] - x + C$. *HD*: Đặt $u = \ln(\cos x)$, $dv = \frac{dx}{\cos^2 x}$;
- e) $-x \cot x + \ln |\sin x| + C$. *HD*: Đặt $u = x$, $dv = \frac{dx}{\sin^2 x}$;
- g) $\frac{1}{5} \ln \left[|x - 2|^3 (x + 3)^2 \right] + C$.
- HD*: Ta có $\frac{x + 1}{(x - 2)(x + 3)} = \frac{3}{5(x - 2)} + \frac{2}{5(x + 3)}$;
- h) $-2(\sqrt{x} + \ln|1 - \sqrt{x}|) + C$. *HD*: Đặt $t = \sqrt{x}$;
- i) $-\frac{1}{2} \left(\cos x + \frac{1}{5} \cos 5x \right) + C$. *HD*: $\sin 3x \cdot \cos 2x = \frac{1}{2} (\sin x + \sin 5x)$;
- k) $\cos x + \frac{1}{\cos x} + C$. *HD*: Đặt $u = \cos x$;
- l) $\frac{1}{a^2 - b^2} \sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} + C$.

3.7. a) $\frac{3}{8}x - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C.$

$$HD : \sin^4 x = \frac{(1 - \cos 2x)^2}{4} = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x \right).$$

b) $\frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} + C.$

HD : Đặt $u = \cot x.$

c) $\cos^5 x \left(\frac{\cos^2 x}{7} - \frac{1}{5} \right) + C.$ HD : Đặt $u = \cos x.$

d) $\frac{1}{128} \left(3x - \sin 4x + \frac{1}{8} \sin 8x \right) + C.$

$$HD : \sin^4 x \cos^4 x = \frac{1}{2^4} (\sin^2 2x)^2 = \frac{1}{2^6} (1 - \cos 4x)^2.$$

e) $\ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| - \frac{1}{\sin x} + C.$ HD : $\frac{1}{\cos x \sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin^2 x}.$

g) $\tan \frac{x}{2} - 2 \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right| + C.$ HD : $\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} = \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}} + \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}.$

3.8. a) $F(x) = 1 - \cot \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right);$

b) $K(x) = 2 \left(1 - \frac{1}{1 + \tan \frac{x}{2}} \right).$