Chương III. NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

§1. Nguyên hàm

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Nguyên hàm và tính chất

Định nghĩa. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K (K là khoảng, đoạn hay nửa khoảng). Hàm số $F(x)$ được gọi là *nguyên hàm* của hàm số $f(x)$ trên K, nếu

$$F'(x) = f(x) \text{ với mọi } x \in K.$$

Định lí

1) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K, thì với mỗi hằng số C, hàm số $G(x) = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K.

2) Ngược lại, nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K, thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$ với C là một hằng số.

Kí hiệu họ nguyên hàm của $f(x)$ là $\int f(x)\mathrm{d}x$.

Khi đó

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Tính chất của nguyên hàm

Tính chất 1

$$\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C.$$

Tính chất 2

$$\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x \text{ (k là hằng số khác 0).}$$

Tính chất 3

$$\int \left(f(x) \pm g(x)\right)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x.$$

Sự tồn tại nguyên hàm

Định lí. Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K.

Bảng nguyên hàm của một số hàm số thường gặp.

Nguyên hàm của hàm số sơ cấp	Nguyên hàm của hàm số hợp (với $u = u(x)$)
$\int 0\mathrm{d}x = C$	$\int 0\mathrm{d}u = C$
$\int \mathrm{d}x = x + C$	$\int \mathrm{d}u = u + C$
$\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\ (\alpha \neq -1)$	$\int u^{\alpha}\mathrm{d}u = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1)$
$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln\|x\| + C$	$\int \frac{1}{u}\mathrm{d}u = \ln\|u\| + C$
$\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x} + C$	$\int \mathrm{e}^{u}\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{u} + C$
$\int a^{x}\mathrm{d}x = \frac{a^{x}}{\ln a} + C\ (a \neq 1,\ a > 0)$	$\int a^{u}\mathrm{d}u = \frac{a^{u}}{\ln a} + C\ (0 < a,\ a \neq 1)$
$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$	$\int \cos u\mathrm{d}u = \sin u + C$
$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$	$\int \sin u\mathrm{d}u = -\cos u + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 u}\mathrm{d}u = \tan u + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 u}\mathrm{d}u = -\cot u + C$

2. Phương pháp tính nguyên hàm

a) Phương pháp đổi biến số

Định lí 1. Nếu $\int f(u)\mathrm{d}u = F(u) + C$ và $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thì

$$\int f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x = F(u(x)) + C,$$

Hệ quả. Nếu $u = ax + b\ (a \neq 0)$ thì ta có

$$\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

b) Phương pháp tính nguyên hàm từng phần

Định lí 2. Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm liên tục trên K, thì

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

hay

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u.$$

B. VÍ DỤ

• ***Ví dụ 1***

Tính $$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\mathrm{d}x.$$

Giải

Ta có $$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{\cos^4 x} - \frac{1}{\cos^2 x}\right)\sin x\mathrm{d}x.$$

Đặt $t = \cos x$, ta được $t' = -\sin x$ và

$$\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{\cos^4 x} - \frac{1}{\cos^2 x}\right)\sin x\mathrm{d}x \text{ viết thành } -\left(\frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t.$$

Do đó, nguyên hàm đã cho viết thành

$$-\int \left(\frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t^3} - \frac{1}{t} + C.$$

Thay $t = \cos x$, ta được $$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\mathrm{d}x = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C.$$

• ***Ví dụ 2***

Tính $$\int \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x.$$

Giải

Đặt $u = \ln(\sin x)$ và $\mathrm{d}v = \dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\tan x)$, ta có

$$\int \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \ln(\sin x)\,\mathrm{d}(\tan x)$$

$$= \tan x.\ln(\sin x) - \int \mathrm{d}x = \tan x\ln(\sin x) - x + C.$$

• ***Ví dụ 3***

Tính $$\int \cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$$

Giải

Đổi biến $t = \sqrt{x}$, ta được $t' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ và

$$\cos\sqrt{x}\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}.\cos\sqrt{x}.\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x \text{ viết thành } 2t\cos t\mathrm{d}t.$$

Vậy nguyên hàm đã cho viết thành $2\int t\cos t\mathrm{d}t.$

Áp dụng phương pháp tính nguyên hàm từng phần, ta có

$$\int t\cos t\mathrm{d}t = t\sin t - \int \sin t\mathrm{d}t = t\sin t + \cos t + \frac{C}{2}.$$

Do đó $$\int \cos\sqrt{x}\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + C.$$

C. BÀI TẬP

3.1. Kiểm tra xem hàm số nào là một nguyên hàm của hàm số còn lại trong mỗi cặp hàm số sau :

a) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$ và $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$;

b) $f(x) = \mathrm{e}^{\sin x}\cos x$ và $g(x) = \mathrm{e}^{\sin x}$;

c) $f(x) = \sin^2\dfrac{1}{x}$ và $g(x) = -\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{2}{x}$;

d) $f(x) = \dfrac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$ và $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$;

e) $f(x) = x^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ và $g(x) = (2x - 1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

3.2. Chứng minh rằng các hàm số $F(x)$ và $G(x)$ sau đều là một nguyên hàm của cùng một hàm số :

a) $F(x) = \dfrac{x^2 + 6x + 1}{2x - 3}$ và $G(x) = \dfrac{x^2 + 10}{2x - 3}$;

b) $F(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$ và $G(x) = 10 + \cot^2 x$;

c) $F(x) = 5 + 2\sin^2 x$ và $G(x) = 1 - \cos 2x$.

3.3. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau :

a) $f(x) = (x-9)^4$;

b) $f(x) = \dfrac{1}{(2-x)^2}$;

c) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$;

e) $f(x) = \dfrac{1-\cos 2x}{\cos^2 x}$;

f) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$.

3.4. Tính các nguyên hàm sau bằng phương pháp đổi biến số :

a) $\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3}\,\mathrm{d}x$ với $x > -1$ (đặt $t = 1 + x^3$) ;

b) $\int x e^{-x^2}\mathrm{d}x$ (đặt $t = x^2$) ;

c) $\int \dfrac{x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$ (đặt $t = 1 + x^2$) ;

d) $\int \dfrac{1}{(1-x)\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ (đặt $t = \sqrt{x}$) ;

e) $\int \sin\dfrac{1}{x}.\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ $\left(\text{đặt } t = \dfrac{1}{x}\right)$;

g) $\int \dfrac{(\ln x)^2}{x}\mathrm{d}x$ (đặt $t = \ln x$) ;

h) $\int \dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}\mathrm{d}x$ (đặt $t = \cos x$) ;

i) $\int \cos x \sin^3 x\,\mathrm{d}x$ (đặt $t = \sin x$) ;

k) $\int \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$ (đặt $t = \mathrm{e}^x$) ;

l) $\int \dfrac{\cos x + \sin x}{\sqrt{\sin x - \cos x}}\mathrm{d}x$ (đặt $t = \sin x - \cos x$).

3.5. Áp dụng phương pháp tính nguyên hàm từng phần, hãy tính :

a) $\int (1-2x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$;

b) $\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$;

c) $\int x\ln(1-x)\mathrm{d}x$;

d) $\int x\sin^2 x\,\mathrm{d}x$;

e) $\int \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$;

g) $\int \sqrt{x}\ln^2 x\,\mathrm{d}x$;

h) $\int x\ln\dfrac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x$.

3.6. Tính các nguyên hàm sau :

a) $\int x(3-x)^5\,dx$; b) $\int (2^x - 3^x)^2\,dx$;

c) $\int x\sqrt{2-5x}\,dx$; d) $\int \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}dx$;

e) $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx$; g) $\int \frac{x+1}{(x-2)(x+3)}\,dx$;

h) $\int \frac{1}{1-\sqrt{x}}\,dx$; i) $\int \sin 3x\cos 2x dx$;

k) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx$;

l) $\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}}\,dx$, $(a^2 \neq b^2)$.

HD : Đặt $u = \sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$.

3.7. Bằng cách biến đổi các hàm số lượng giác, hãy tính :

a) $\int \sin^4 x dx$; b) $\int \frac{1}{\sin^3 x}dx$;

c) $\int \sin^3 x\cos^4 x dx$; d) $\int \sin^4 x\cos^4 x\,dx$;

e) $\int \frac{1}{\cos x\sin^2 x}dx$; g) $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}d\,x$.

3.8. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào là một nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = \frac{1}{1+\sin x}\ ?$$

a) $F(x) = 1 - \cot\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$; b) $G(x) = 2\tan\frac{x}{2}$;

c) $H(x) = \ln(1+\sin x)$; d) $K(x) = 2\left(1 - \frac{1}{1+\tan\frac{x}{2}}\right)$.