

## LỜI GIẢI - HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ CHƯƠNG I

### §1.

1.1. a)  $y = 3x^2 - 8x^3$ . TXĐ<sup>(\*)</sup> :  $\mathbb{R}$ .

$$y' = 6x - 24x^2 = 6x(1 - 4x).$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

$y' > 0$  trên khoảng  $\left(0 ; \frac{1}{4}\right)$ , suy ra  $y$  đồng biến trên khoảng  $\left(0 ; \frac{1}{4}\right)$ .

$y' < 0$  trên các khoảng  $(-\infty ; 0)$ ,  $\left(\frac{1}{4} ; +\infty\right)$ , suy ra  $y$  nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty ; 0)$ ;  $\left(\frac{1}{4} ; +\infty\right)$ .

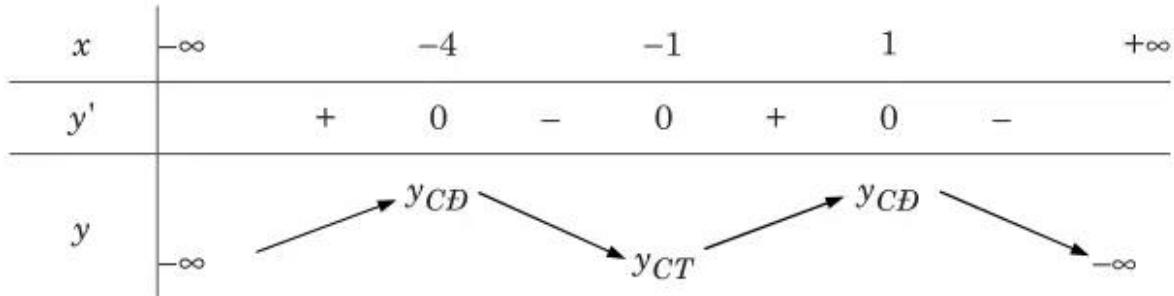
b)  $y = 16x + 2x^2 - \frac{16}{3}x^3 - x^4$ . TXĐ :  $\mathbb{R}$ .

$$y' = 16 + 4x - 16x^2 - 4x^3 = -4(x+4)(x^2-1).$$

---

(\*) Tập xác định viết tắt là TXĐ.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -1 \\ x = 1. \end{cases}$$



Vậy hàm số  $y$  đã cho đồng biến trên các khoảng  $(-\infty ; -4)$  và  $(-1 ; 1)$ , nghịch biến trên các khoảng  $(-4 ; -1)$  và  $(1 ; +\infty)$ .

c)  $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ . TXĐ:  $\mathbb{R}$ .

$$y' = 3x^2 - 12x + 9, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3. \end{cases}$$

$y' > 0$  trên các khoảng  $(-\infty ; 1)$ ,  $(3 ; +\infty)$  nên  $y$  đồng biến trên các khoảng  $(-\infty ; 1)$ ,  $(3 ; +\infty)$ .

$y' < 0$  trên khoảng  $(1 ; 3)$  nên  $y$  nghịch biến trên khoảng  $(1 ; 3)$ .

d)  $y = x^4 + 8x^2 + 5$ . TXĐ:  $\mathbb{R}$ .

$$y' = 4x^3 + 16x = 4x(x^2 + 4), y' = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$y' > 0$  trên khoảng  $(0 ; +\infty) \Rightarrow y$  đồng biến trên khoảng  $(0 ; +\infty)$ .

$y' < 0$  trên khoảng  $(-\infty ; 0) \Rightarrow y$  nghịch biến trên khoảng  $(-\infty ; 0)$ .

1.2 a)  $y = \frac{3 - 2x}{x + 7}$ . TXĐ:  $\mathbb{R} \setminus \{-7\}$ .

$$y' = \frac{-17}{(x + 7)^2}.$$

$y' < 0$  trên các khoảng  $(-\infty ; -7)$ ,  $(-7 ; +\infty)$  nên hàm số nghịch biến trên các khoảng đó.

b)  $y = \frac{1}{(x - 5)^2}$ . TXĐ:  $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ .

$$y' = \frac{-2}{(x - 5)^3}.$$

$y' < 0$  trên khoảng  $(5 ; +\infty)$  nên  $y$  nghịch biến trên khoảng  $(5 ; +\infty)$ .

$y' > 0$  trên khoảng  $(-\infty ; 5)$  nên  $y$  đồng biến trên khoảng  $(-\infty ; 5)$ .

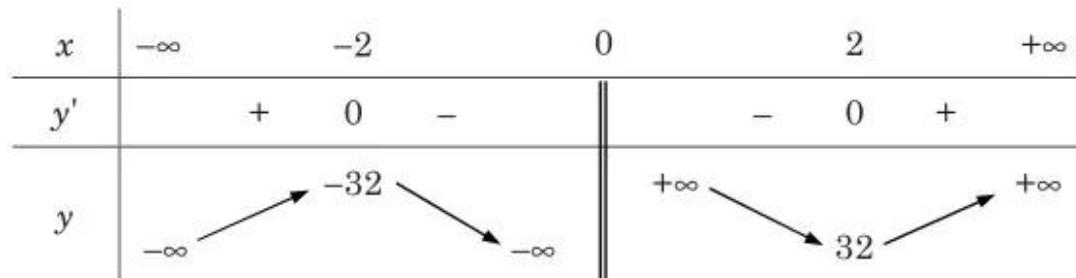
c)  $y = \frac{2x}{x^2 - 9}$ . TXĐ :  $\mathbb{R} \setminus \{-3 ; 3\}$ .

$$y' = \frac{-2(x^2 + 9)}{(x^2 - 9)^2}.$$

$y' < 0$  trên các khoảng  $(-\infty ; -3)$ ,  $(-3 ; 3)$ ,  $(3 ; +\infty)$  nên hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng đó.

d)  $y = \frac{x^4 + 48}{x}$ . TXĐ :  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

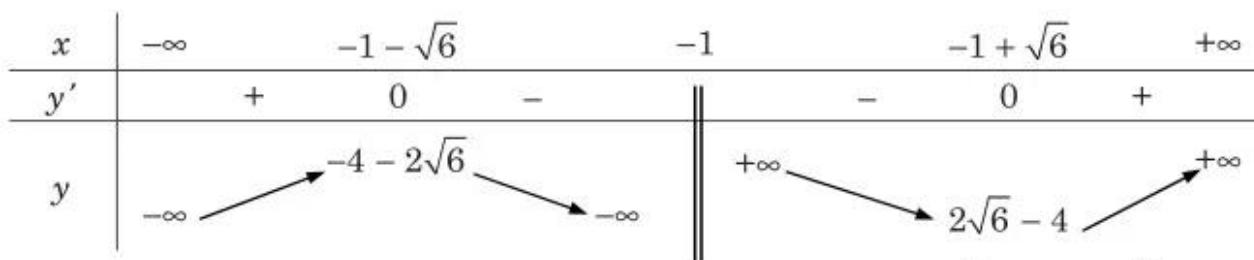
$$y' = \frac{3(x^4 - 16)}{x^2} = \frac{3(x^2 - 4)(x^2 + 4)}{x^2}, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2. \end{cases}$$



Vậy hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng  $(-\infty ; -2)$ ,  $(2 ; +\infty)$  và nghịch biến trên các khoảng  $(-2 ; 0)$ ,  $(0 ; 2)$ .

e)  $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 1}$ . TXĐ :  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

$$y' = \frac{x^2 + 2x - 5}{(x + 1)^2}, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - \sqrt{6} \\ x = -1 + \sqrt{6}. \end{cases}$$



Vậy hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng  $(-\infty ; -1 - \sqrt{6})$ ,  $(-1 + \sqrt{6} ; +\infty)$  và nghịch biến trên các khoảng  $(-1 - \sqrt{6} ; -1)$ ,  $(-1 ; -1 + \sqrt{6})$ .

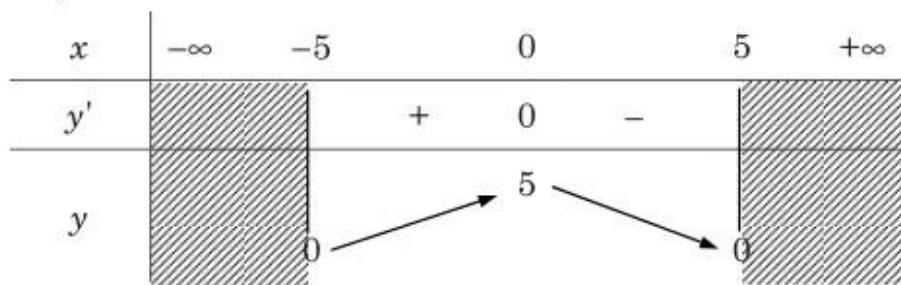
g)  $y = \frac{x^2 - 5x + 3}{x - 2}$ . TXĐ :  $\setminus \{2\}$ .

$$y' = \frac{x^2 - 4x + 7}{(x - 2)^2} > 0 \text{ (do } x^2 - 4x + 7 \text{ có } \Delta' = -3 < 0).$$

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng  $(-\infty ; 2)$ ,  $(2 ; +\infty)$ .

1.3. a)  $y = \sqrt{25 - x^2}$ . TXĐ :  $[-5 ; 5]$ .

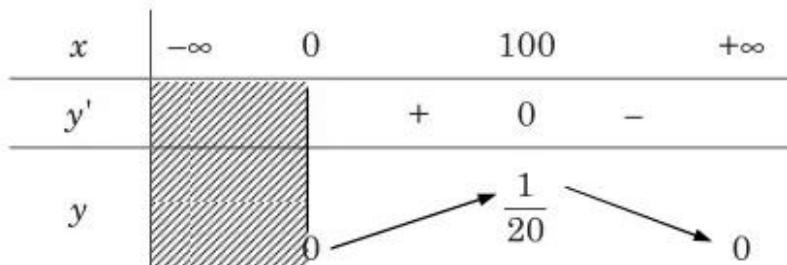
$$y' = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}; y' = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$



Vậy hàm số đồng biến trên khoảng  $(-5 ; 0)$ , nghịch biến trên khoảng  $(0 ; 5)$ .

b)  $y = \frac{\sqrt{x}}{x + 100}$ . TXĐ :  $[0 ; +\infty)$ .

$$y' = \frac{100 - x}{2\sqrt{x}(x + 100)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow x = 100.$$



Vậy hàm số đồng biến trên khoảng  $(0 ; 100)$  và nghịch biến trên khoảng  $(100 ; +\infty)$ .

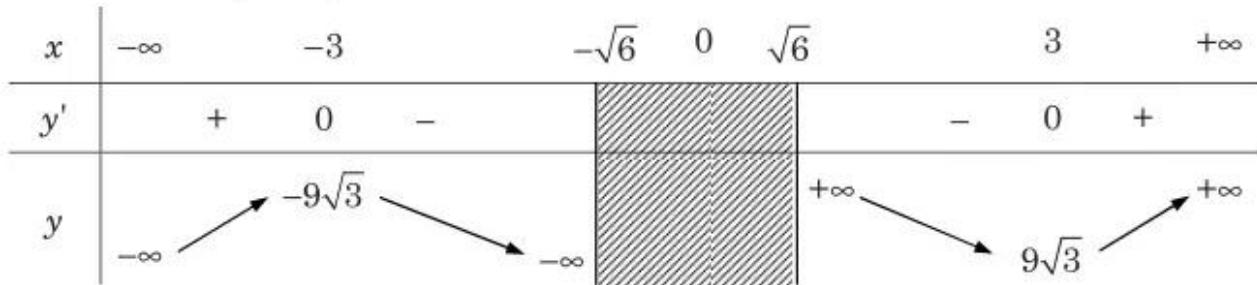
c)  $y = \frac{x}{\sqrt{16 - x^2}}$ . TXĐ :  $(-4 ; 4)$ .

$$y' = \frac{16}{(16 - x^2)\sqrt{16 - x^2}} > 0, \forall x \in (-4 ; 4).$$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng  $(-4 ; 4)$ .

d)  $y = \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 6}}$ . TXĐ :  $(-\infty; -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}; +\infty)$ .

$$y' = \frac{2x^2(x^2 - 9)}{(x^2 - 6)\sqrt{x^2 - 6}}; y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3.$$



Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng  $(-\infty; -3)$ ,  $(3; +\infty)$ , nghịch biến trên các khoảng  $(-3; -\sqrt{6})$ ,  $(\sqrt{6}; 3)$ .

**1.4.** a)  $y = x - \sin x$ ,  $x \in [0; 2\pi]$ .

$$y' = 1 - \cos x \geq 0 \text{ với mọi } x \in [0; 2\pi].$$

Dấu "=" xảy ra chỉ tại  $x = 0$  và  $x = 2\pi$ .

Vậy hàm số đồng biến trên đoạn  $[0; 2\pi]$ .

b)  $y = x + 2\cos x$ ,  $x \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$ .

$$y' = 1 - 2\sin x < 0 \text{ với } x \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right).$$

Do đó, hàm số nghịch biến trên khoảng  $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$ .

c) Xét hàm số  $y = \sin \frac{1}{x}$  với  $x > 0$ .

$$y' = -\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}.$$

Giải bất phương trình sau trên khoảng  $(0; +\infty)$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} \left(-\cos \frac{1}{x}\right) &> 0 \Leftrightarrow \cos \frac{1}{x} < 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}(1+4k) &< \frac{1}{x} < \frac{\pi}{2}(3+4k), k=0, 1, 2, \dots \\ \Leftrightarrow \frac{2}{\pi(1+4k)} &> x > \frac{2}{\pi(3+4k)}, k=0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Do đó, hàm số đồng biến trên các khoảng

$$\dots, \left( \frac{2}{(4k+3)\pi}; \frac{2}{(4k+1)\pi} \right), \left( \frac{2}{(4k-1)\pi}; \frac{2}{(4k-3)\pi} \right), \dots, \left( \frac{2}{7\pi}; \frac{2}{5\pi} \right), \left( \frac{2}{3\pi}; \frac{2}{\pi} \right)$$

và nghịch biến trên các khoảng

$$\dots, \left( \frac{2}{(4k+1)\pi}; \frac{2}{(4k-1)\pi} \right), \dots, \left( \frac{2}{5\pi}; \frac{2}{3\pi} \right), \left( \frac{2}{\pi}; +\infty \right), \text{ với } k = 0, 1, 2, \dots$$

- 1.5.** a) Xét hàm số  $f(x) = \tan x - \sin x$  trên nửa khoảng  $\left[ 0; \frac{\pi}{2} \right]$ ;

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \cos x = \frac{1 - \cos^3 x}{\cos^2 x} \geq 0, \quad x \in \left[ 0; \frac{\pi}{2} \right].$$

Dấu " $=$ " xảy ra chỉ tại  $x = 0$ .

Suy ra  $f(x)$  đồng biến trên nửa khoảng  $\left[ 0; \frac{\pi}{2} \right]$ .

Mặt khác, ta có  $f(0) = 0$ , nên  $f(x) = \tan x - \sin x > 0$  hay  $\tan x > \sin x$  với mọi  $x \in \left( 0; \frac{\pi}{2} \right)$ .

- b) • Xét hàm số  $h(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \sqrt{1+x}$  trên  $[0; +\infty)$  ;

$$h'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \geq 0 \text{ với } 0 \leq x < +\infty.$$

Dấu " $=$ " xảy ra chỉ tại  $x = 0$  nên  $h(x)$  đồng biến trên nửa khoảng  $[0; +\infty)$ .

Vì  $h(0) = 0$  nên

$$h(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \sqrt{1+x} > 0$$

hay  $1 + \frac{1}{2}x > \sqrt{1+x}$  với  $0 < x < +\infty$ .

- Xét hàm số  $f(x) = \sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x + \frac{x^2}{8}$  trên  $[0; +\infty)$  ;

$$g(x) = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2} + \frac{x}{4},$$

$$g'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4(1+x)\sqrt{1+x}} \geq 0 \text{ với } 0 \leq x < +\infty.$$

Vì  $g(0) = 0$  và  $g(x)$  đồng biến trên nửa khoảng  $[0 ; +\infty)$  nên  $g(x) \geq 0$ , tức là  $f'(x) \geq 0$  trên khoảng đó và vì dấu " $=$ " xảy ra chỉ tại  $x = 0$  nên  $f(x)$  đồng biến trên nửa khoảng  $[0 ; +\infty)$ .

Mặt khác, ta có  $f(0) = 0$  nên

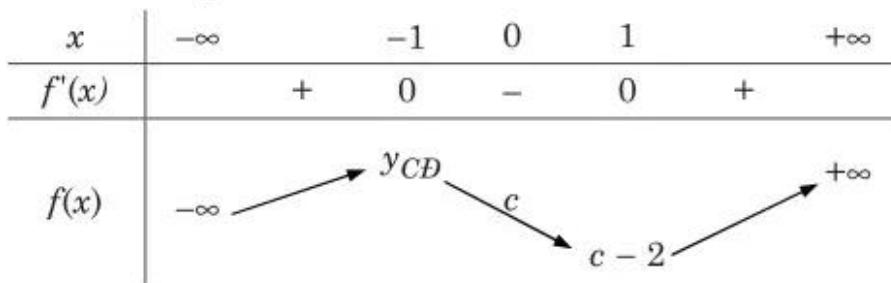
$$f(x) = \sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x + \frac{x^2}{8} > 0 \text{ hay } 1 + \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x}$$

với mọi  $0 < x < +\infty$ .

**1.6.** Đặt  $f(x) = x^3 - 3x + c$ . TXĐ : .

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1),$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1. \end{cases}$$



Trên đoạn  $[0 ; 1]$  hàm số  $f(x)$  nghịch biến nên đồ thị của hàm số  $f(x)$  không thể cắt trục hoành tại hai điểm trên đoạn này, tức là phương trình  $x^3 - 3x + c = 0$  không thể có hai nghiệm thực trên đoạn  $[0 ; 1]$ .

**1.7.**  $f(x) = \sin x - bx + c$  nghịch biến trên nếu ta có  $f'(x) = \cos x - b \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Vì  $|\cos x| \leq 1$  nên  $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow b \geq 1$ .