

C *hương I.* **ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ**

§1. Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Giả sử $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a ; b)$. Thế thì :

a) $f'(x) > 0, \forall x \in (a ; b) \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a ; b)$.

$f'(x) < 0, \forall x \in (a ; b) \Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a ; b)$.

b) $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a ; b) \Rightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in (a ; b)$.

$f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a ; b) \Rightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in (a ; b)$.

Khoảng $(a ; b)$ được gọi chung là khoảng đơn điệu của hàm số.

B. VÍ DỤ

• Ví dụ 1

Tìm khoảng đơn điệu của các hàm số sau :

$$\text{a)} \ y = x^4 + 8x^3 + 5; \quad \text{b)} \ y = \sqrt{x}(x - 3), (x > 0);$$

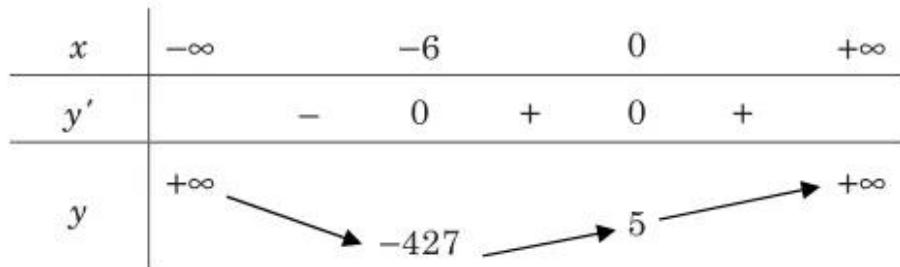
$$\text{c)} \ y = \frac{x-2}{x^2+x+1}.$$

Giải

$$\text{a)} \ y' = 4x^3 + 24x^2 = 4x^2(x + 6).$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -6. \end{cases}$$

Bảng biến thiên



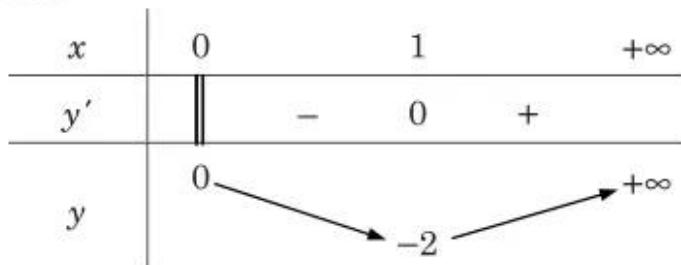
Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty ; -6)$, đồng biến trên khoảng $(-6 ; +\infty)$.

b) $y = \sqrt{x}(x - 3)$, ($x \geq 0$);

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x - 3) + \sqrt{x} = \frac{3\sqrt{x}(x - 1)}{2x};$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên



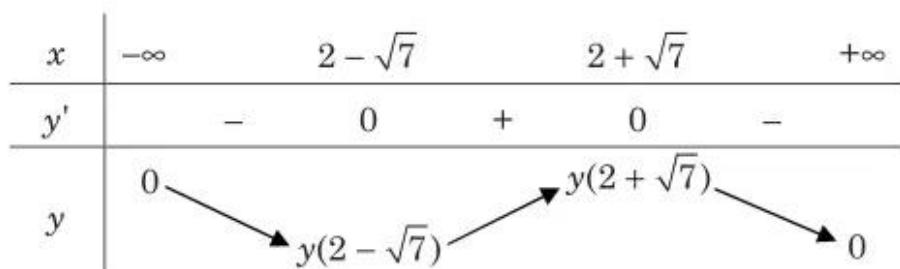
Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0 ; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1 ; +\infty)$.

c) $y = \frac{x-2}{x^2+x+1}$ xác định trên \mathbb{R} .

$$y' = \frac{-x^2 + 4x + 3}{(x^2 + x + 1)^2};$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{7} \\ x = 2 + \sqrt{7}. \end{cases}$$

Bảng biến thiên



Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(2 - \sqrt{7}; 2 + \sqrt{7})$ và nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 2 - \sqrt{7})$, $(2 + \sqrt{7}; +\infty)$.

• *Ví du 2*

Sử dụng tính đồng biến và nghịch biến của hàm số, chứng minh rằng với mọi $x > 0$ ta có $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

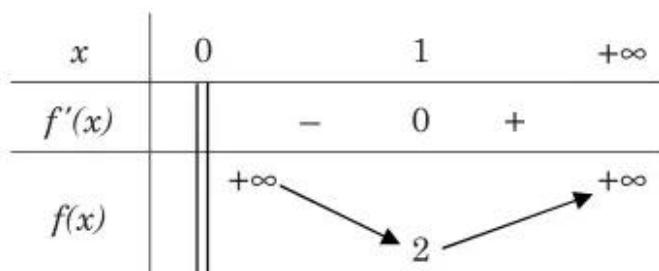
Giải

Xét hàm số $f(x) = x + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$, ta có

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (vì } x > 0\text{)}.$$

Bảng biến thiên



Ta có $f(1) = 2$ và $f(x) > 2$ với mọi $0 < x \neq 1$.

Vậy $f(x) = x + \frac{1}{x} \geq 2$ với mọi $x > 0$.

C. BÀI TẬP

1.1. Xét sự đồng biến, nghịch biến của các hàm số:

a) $y = 3x^2 - 8x^3$;

$$\text{b) } y = 16x + 2x^2 - \frac{16}{3}x^3 - x^4;$$

$$c) y = x^3 - 6x^2 + 9x.$$

d) $y = x^4 + 8x^2 + 5$

1.2. Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của các hàm số :

a) $y = \frac{3 - 2x}{x + 7};$

b) $y = \frac{1}{(x - 5)^2};$

c) $y = \frac{2x}{x^2 - 9};$

d) $y = \frac{x^4 + 48}{x};$

e) $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 1};$

g) $y = \frac{x^2 - 5x + 3}{x - 2}.$

1.3. Xét tính đơn điệu của các hàm số :

a) $y = \sqrt{25 - x^2};$

b) $y = \frac{\sqrt{x}}{x + 100};$

c) $y = \frac{x}{\sqrt{16 - x^2}};$

d) $y = \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 6}}.$

1.4. Xét sự đồng biến, nghịch biến của các hàm số :

a) $y = x - \sin x, x \in [0; 2\pi];$

b) $y = x + 2\cos x, x \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right);$

c) $y = \sin \frac{1}{x} (x > 0).$

1.5. Chứng minh các bất đẳng thức sau :

a) $\tan x > \sin x, 0 < x < \frac{\pi}{2};$

b) $1 + \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1 + x} < 1 + \frac{1}{2}x$ với $0 < x < +\infty.$

1.6. Chứng minh rằng phương trình $x^3 - 3x + c = 0$ không thể có hai nghiệm thực trong đoạn $[0; 1].$

1.7. Xác định giá trị của b để hàm số $f(x) = \sin x - bx + c$ nghịch biến trên toàn trực số.