Chương I. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

§1. Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Giả sử $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a\ ;\ b)$. Thế thì :

a) $f'(x) > 0,\ \forall x \in (a\ ;\ b) \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a\ ;\ b)$.

$f'(x) < 0,\ \forall x \in (a\ ;\ b) \Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a\ ;\ b)$.

b) $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a\ ;\ b) \Rightarrow f'(x) \geq 0,\ \forall x \in (a\ ;\ b)$.

$f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a\ ;\ b) \Rightarrow f'(x) \leq 0,\ \forall x \in (a\ ;\ b)$.

Khoảng $(a\ ;\ b)$ được gọi chung là khoảng đơn điệu của hàm số.

B. VÍ DỤ

• *Ví dụ 1*

Tìm khoảng đơn điệu của các hàm số sau :

a) $y = x^4 + 8x^3 + 5$; b) $y = \sqrt{x}(x-3)$, $(x > 0)$;

c) $y = \dfrac{x-2}{x^2 + x + 1}$.

Giải

a) $y' = 4x^3 + 24x^2 = 4x^2(x+6)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -6. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-6		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-427	$\nearrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty\ ; -6)$, đồng biến trên khoảng $(-6\ ; +\infty)$.

b) $y = \sqrt{x}(x-3)$, $(x \geq 0)$;

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-3) + \sqrt{x} = \frac{3\sqrt{x}(x-1)}{2x};$$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

Bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
y'	$\|$	$-$	0	$+$	
y	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0\ ; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1\ ; +\infty)$.

c) $y = \dfrac{x-2}{x^2+x+1}$ xác định trên ¡ .

$$y' = \frac{-x^2+4x+3}{\left(x^2+x+1\right)^2};$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2-\sqrt{7} \\ x = 2+\sqrt{7}. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$2-\sqrt{7}$		$2+\sqrt{7}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	$y(2-\sqrt{7})$	$\nearrow$	$y(2+\sqrt{7})$	$\searrow$	0

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $\left(2-\sqrt{7}\ ;\ 2+\sqrt{7}\right)$ và nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty\ ;\ 2-\sqrt{7}\right)$, $\left(2+\sqrt{7}\ ;\ +\infty\right)$.

• ***Ví dụ 2***

Sử dụng tính đồng biến và nghịch biến của hàm số, chứng minh rằng với mọi $x > 0$ ta có $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$.

Giải

Xét hàm số $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ trên khoảng $(0\ ;\ +\infty)$, ta có

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (vì } x > 0).$$

Bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Ta có $f(1) = 2$ và $f(x) > 2$ với mọi $0 < x \neq 1$.

Vậy $f(x) = x + \dfrac{1}{x} \geq 2$ với mọi $x > 0$.

C. BÀI TẬP

1.1. Xét sự đồng biến, nghịch biến của các hàm số :

a) $y = 3x^2 - 8x^3$;

b) $y = 16x + 2x^2 - \dfrac{16}{3}x^3 - x^4$;

c) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$;

d) $y = x^4 + 8x^2 + 5$.

1.2. Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của các hàm số :

a) $y = \dfrac{3-2x}{x+7}$; b) $y = \dfrac{1}{(x-5)^2}$;

c) $y = \dfrac{2x}{x^2-9}$; d) $y = \dfrac{x^4+48}{x}$;

e) $y = \dfrac{x^2-2x+3}{x+1}$; g) $y = \dfrac{x^2-5x+3}{x-2}$.

1.3. Xét tính đơn điệu của các hàm số :

a) $y = \sqrt{25-x^2}$; b) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x+100}$;

c) $y = \dfrac{x}{\sqrt{16-x^2}}$; d) $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2-6}}$.

1.4. Xét sự đồng biến, nghịch biến của các hàm số :

a) $y = x - \sin x$, $x \in [0 ; 2\pi]$;

b) $y = x + 2\cos x$, $x \in \left(\dfrac{\pi}{6} ; \dfrac{5\pi}{6}\right)$;

c) $y = \sin\dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$.

1.5. Chứng minh các bất đẳng thức sau :

a) $\tan x > \sin x, 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$;

b) $1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \dfrac{1}{2}x$ với $0 < x < +\infty$.

1.6. Chứng minh rằng phương trình $x^3 - 3x + c = 0$ không thể có hai nghiệm thực trong đoạn $[0 ; 1]$.

1.7. Xác định giá trị của b để hàm số $f(x) = \sin x - bx + c$ nghịch biến trên toàn trục số.