§2

4.8. *Đáp số :* a) $54 - 19i$; b) $-15 + i$.

4.9. a) $x = \frac{12}{\sqrt{3}} + \frac{8}{\sqrt{3}}i$; b) $x = \frac{5}{2} + 5i$.

4.10. a) $(3 - 4i)^2 = 3^2 - 2.3.4i + (4i)^2 = -7 - 24i$;

b) $(2 + 3i)^3 = 2^3 + 3.2^2.3i + 3.2.(3i)^2 + (3i)^3 = -46 + 9i$;

c) $[(4 + 5i) - (4 + 3i)]^5 = (2i)^5 = 32i$;

d) $\left(\sqrt{2} - i\sqrt{3}\right)^2 = -1 - 2i\sqrt{6}$.

4.11. a) $(1 + i)^{2006} = \left((1 + i)^2\right)^{1003} = (2i)^{1003} = 2^{1003}.i^{1003} = -2^{1003}.i$;

b) $(1 - i)^{2006} = 2^{1003}.i$.

4.12. a) $\overline{x + \overline{y}} = \overline{x} + \overline{\overline{y}} = \overline{x} + y$; b) $\overline{x\overline{y}} = \overline{x}.\overline{\overline{y}} = \overline{x}.y$;

c) $\overline{x - \overline{y}} = \overline{x} - \overline{\overline{y}} = \overline{x} - y$.

b) Đặt $-v = -c - di$ thì $u - v = u + (-v)$ và $|-v| = |v|$.

Từ đó áp dụng câu a), ta được kết luận câu b).

c) $uv = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

$\Rightarrow |uv| = \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} = \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2}$.

Mặt khác $|u||v| = \sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2}$.

Từ đó suy ra $|uv| = |u||v|$.

4.16. a) $u^2 + v^2 = u^2 - (iv)^2 = (u - iv)(u + iv)$.

b) $u^4 - v^4 = (u^2 - v^2)(u^2 + v^2) = (u - v)(u + v)(u - iv)(u + iv)$.

4.13. *Đáp số :* a) 1 ; b) −1.

4.14. *HD :* $z^2 = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$;

$(\overline{z})^2 = (a - bi)^2 = a^2 - b^2 - 2abi$;

$z.\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$.

Từ đó suy ra các kết quả.

4.15. Đặt $u = a + bi,\ v = c + di$. Khi đó $|u| = \sqrt{a^2 + b^2}$; $|v| = \sqrt{c^2 + d^2}$;

$$|u + v| = \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2}.$$

a) • Ta có $|u + v| \le |u| + |v| \Leftrightarrow \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2} \le \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}$

$\Leftrightarrow (a + c)^2 + (b + d)^2 \le a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$

$\Leftrightarrow ac + bd \le \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$. (*)

Nếu $ac + bd < 0$ thì (*) hiển nhiên đúng.

Nếu $ac + bd \ge 0$ thì (*) $\Leftrightarrow (ac + bd)^2 \le (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$

$\Leftrightarrow a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd \le a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2$.

$\Leftrightarrow 2abcd \le a^2d^2 + b^2c^2$

$\Leftrightarrow 0 \le a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd = (ad - bc)^2$, đúng.

• Ta có $|u| - |v| \le |u + v| \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{c^2 + d^2} \le \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2}$.

Nếu $\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{c^2 + d^2} < 0$ thì bất đẳng thức trên luôn đúng.

Nếu $\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{c^2 + d^2} \ge 0$ thì bất đẳng thức trên tương đương với

$$\left(\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{c^2 + d^2}\right)^2 \le (a + c)^2 + (b + d)^2$$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \le a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ac + 2bd$

$\Leftrightarrow -\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \le ac + bd$. (**)

Nếu $ac + bd \ge 0$ thì (**) luôn đúng.

Nếu $ac + bd < 0$ thì (**) tương đương với

$(ac + bd)^2 \le (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$

$\Leftrightarrow a^2c^2 + b^2d^2 + 2acbd \le a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2$

$\Leftrightarrow 0 \le a^2d^2 + b^2c^2 - 2acbd = (ad - bc)^2$ (đúng).