§2.

1.8. a) $y = -2x^2 + 7x - 5$. TXĐ : .

$y' = -4x + 7, \quad y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{4}.$

$y'' = -4 \Rightarrow y''\left(\frac{7}{4}\right) = -4 < 0.$

Vậy $x = \frac{7}{4}$ là điểm cực đại của hàm số và $y_{CĐ} = \frac{9}{8}$.

b) $y = x^3 - 3x^2 - 24x + 7$. TXĐ : .

$y' = 3x^2 - 6x - 24 = 3\left(x^2 - 2x - 8\right)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 4. \end{array}\right.$$

$y'' = 6x - 6$.

Vì $y''(-2) = -18 < 0$, $y''(4) = 18 > 0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x = -2$; đạt cực tiểu tại $x = 4$ và $y_{CĐ} = y(-2) = 35$; $y_{CT} = y(4) = -73$.

c) $y = x^4 - 5x^2 + 4$. TXĐ : .

$y' = 4x^3 - 10x = 2x\left(2x^2 - 5\right)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\sqrt{\dfrac{5}{2}} \\ x = \sqrt{\dfrac{5}{2}}. \end{array}\right.$$

$y'' = 12x^2 - 10$.

Vì $y''\left(\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}\right) = 20 > 0$, $y''(0) = -10 < 0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, đạt cực tiểu tại $x = \pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ và ta có

$$y_{CĐ} = y(0) = 4,\ y_{CT} = y\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = -\frac{9}{4}.$$

d) $y = (x+1)^3(5-x)$. TXĐ : .

$y' = -(x+1)^3 + 3(x+1)^2(5-x) = 2(x+1)^2(7-2x)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \dfrac{7}{2}. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	$y_{CĐ}$	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đạt cực đại tại $x = \dfrac{7}{2}$ và $y_{CĐ} = y\left(\dfrac{7}{2}\right) = \dfrac{2187}{16}$.

e) $y = (x+2)^2(x-3)^3$. TXĐ : .

$$y' = 2(x+2)(x-3)^3 + 3(x+2)^2(x-3)^2 = 5x(x+2)(x-3)^2.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 3. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-108	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó suy ra $y_{CĐ} = y(-2) = 0$; $y_{CT} = y(0) = -108$.

1.9. a) $y = \dfrac{x+1}{x^2+8}$. TXĐ : .

$$y' = \frac{x^2 + 8 - 2x(x+1)}{(x^2+8)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 8}{\left(x^2+8\right)^2}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	$-\frac{1}{8}$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$, cực tiểu tại $x = -4$ và $y_{CĐ} = y(2) = \frac{1}{4}$,

$y_{CT} = y(-4) = -\frac{1}{8}$.

b) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$.

Hàm số xác định và có đạo hàm với mọi $x \neq 1$.

$$y' = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 - \sqrt{2} \\ x = 1 + \sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$1 - \sqrt{2}$		1		$1 + \sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$y_{CĐ}$	$\searrow$	$-\infty \ \Vert \ +\infty$	$\searrow$	y_{CT}	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1 - \sqrt{2}$; đạt cực tiểu tại $x = 1 + \sqrt{2}$, ta có

$$y_{CĐ} = y\left(1 - \sqrt{2}\right) = -2\sqrt{2},$$

$$y_{CT} = y\left(1 + \sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}.$$

c) $y = \dfrac{x^2 + x - 5}{x + 1}$. TXĐ : $\setminus \{-1\}$.

$$y' = \frac{x^2 + 2x + 6}{(x+1)^2} > 0 \text{ với mọi } x \neq -1.$$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty\ ;\ -1)$, $(-1\ ;\ +\infty)$ và do đó không có cực trị.

d) $y = \dfrac{(x-4)^2}{x^2 - 2x + 5}$.

Vì $x^2 - 2x + 5$ luôn luôn dương nên hàm số xác định trên $(-\infty\ ;\ +\infty)$.

$$y' = \frac{2(x-4)(x^2-2x+5) - (x-4)^2(2x-2)}{(x^2-2x+5)^2} = \frac{2(x-4)(3x+1)}{(x^2-2x+5)^2}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{3} \\ x = 4. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			$y_{CĐ}$				1
	1	$\nearrow$		$\searrow$	y_{CT}	$\nearrow$	

Hàm số đạt cực đại tại $x = -\dfrac{1}{3}$, đạt cực tiểu tại $x = 4$ và

$$y_{CĐ} = y\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{13}{4};\ y_{CT} = y(4) = 0.$$

1.10. a) $y = x - 6\sqrt[3]{x^2}$. TXĐ : .

$$y' = 1 - \frac{4}{\sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[3]{x} - 4}{\sqrt[3]{x}}.$$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 64.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		64		$+\infty$
y'		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
y			0				$+\infty$
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	-32	$\nearrow$	

Vậy ta có $y_{CĐ} = y(0) = 0$ và $y_{CT} = y(64) = -32$.

b) $y = (7 - x)\sqrt[3]{x + 5}$.

Hàm số xác định trên khoảng $(-\infty\ ;\ +\infty)$.

$$y' = -\sqrt[3]{x+5} + \frac{7 - x}{3\sqrt[3]{(x+5)^2}} = \frac{-4(x+2)}{3\sqrt[3]{(x+5)^2}}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-5		-2		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$9\sqrt[3]{3}$	$\searrow$	$-\infty$

Vậy $y_{CĐ} = y(-2) = 9\sqrt[3]{3}$.

c) $y = \dfrac{x}{\sqrt{10 - x^2}}$.

Hàm số xác định trên khoảng $\left(-\sqrt{10}\ ;\ \sqrt{10}\right)$.

$$y' = \frac{\sqrt{10 - x^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{10 - x^2}}}{10 - x^2} = \frac{10}{\left(10 - x^2\right)\sqrt{10 - x^2}}.$$

Vì $y' > 0$ với mọi $x \in \left(-\sqrt{10}\ ;\ \sqrt{10}\right)$ nên hàm số đồng biến trên khoảng đó và do đó không có cực trị.

d) $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2 - 6}}$.

Tập xác định : $D = \left(-\infty\ ;\ -\sqrt{6}\right) \cup \left(\sqrt{6}\ ;\ +\infty\right)$.

$$y' = \frac{3x^2\sqrt{x^2 - 6} - \dfrac{x^4}{\sqrt{x^2 - 6}}}{x^2 - 6} = \frac{3x^2\left(x^2 - 6\right) - x^4}{\sqrt{\left(x^2 - 6\right)^3}} = \frac{2x^2\left(x^2 - 9\right)}{\sqrt{\left(x^2 - 6\right)^3}}\ ;$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 3. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		$-\sqrt{6}$	0	$\sqrt{6}$		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	‖	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-9\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖	‖	‖ $+\infty$	$\searrow$	$9\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = -3$, đạt cực tiểu tại $x = 3$ và

$$y_{CT} = y(3) = 9\sqrt{3}\ ;\ y_{CĐ} = y(-3) = -9\sqrt{3}.$$

1.11. a) $y = \sin 2x$.

Hàm số có chu kì $T = \pi$.

Xét hàm số $y = \sin 2x$ trên đoạn $[0 ; \pi]$, ta có

$$y' = 2\cos 2x.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} \\ x = \dfrac{3\pi}{4}. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Do đó trên đoạn $[0 ; \pi]$, hàm số đạt cực đại tại $\frac{\pi}{4}$, đạt cực tiểu tại $\frac{3\pi}{4}$ và

$$y_{CĐ} = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1\ ;\ y_{CT} = y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1.$$

Vậy trên ¡ ta có :

$$y_{CĐ} = y\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = 1,\ y_{CT} = y\left(\frac{3\pi}{4} + k\pi\right) = -1,\ k \in ¢.$$

b) $y = \cos x - \sin x$. Hàm số tuần hoàn chu kì 2π nên ta xét trên đoạn $[-\pi ; \pi]$.

$y' = -\sin x - \cos x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in$ ¢.

Lập bảng biến thiên trên đoạn $[-\pi ; \pi]$

x	$-\pi$		$-\dfrac{\pi}{4}$		$\dfrac{3\pi}{4}$		π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	-1

Hàm số đạt cực đại tại $x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi$, đạt cực tiểu tại $x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi$ $(k \in$ ¢ $)$ và

$$y_{CĐ} = y\left(-\frac{\pi}{4} + k2\pi\right) = \sqrt{2},$$

$$y_{CT} = y\left(\frac{3\pi}{4} + k2\pi\right) = -\sqrt{2}\ \ (k \in \text{¢}).$$

c) Ta có $y = \sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$.

Do đó, hàm số đã cho tuần hoàn với chu kì π. Ta xét hàm số $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2x$ trên đoạn $[0 ; \pi]$.

$y' = \sin 2x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = k.\dfrac{\pi}{2}$ $(k \in$ ¢ $)$.

Lập bảng biến thiên trên đoạn $[0 ; \pi]$

x	0		$\dfrac{\pi}{2}$		π
y'	0	$+$	0	$-$	0
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Từ đó, ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = k\dfrac{\pi}{2}$ với k chẵn, đạt cực đại tại $x = k\dfrac{\pi}{2}$ với k lẻ, và $y_{CT} = y(2m\pi) = 0$, $y_{CĐ} = y\left((2m+1)\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$ ($m \in$ ¢).

1.12. $y = x^3 - mx^2 + \left(m - \dfrac{2}{3}\right)x + 5.$

Ta biết hàm số $y = f(x)$ có cực trị khi phương trình $y' = 0$ có nghiệm và y' đổi dấu khi qua các nghiệm đó.

Ta có $\qquad y' = 3x^2 - 2mx + \left(m - \dfrac{2}{3}\right).$

Xét $y' = 0$, ta có $\Delta' = m^2 - 3\left(m - \dfrac{2}{3}\right) = m^2 - 3m + 2.$

$$\Delta' > 0 \text{ khi } m < 1 \text{ hoặc } m > 2. \qquad (*)$$

Để hàm số có cực trị tại $x = 1$ thì

$$y'(1) = 3 - 2m + m - \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{7}{3}, \text{ thoả mãn điều kiện } (*).$$

Với $m = \dfrac{7}{3}$ thì hàm số đã cho trở thành

$$y = x^3 - \frac{7}{3}x^2 + \frac{5}{3}x + 5.$$

Ta có $\qquad y' = 3x^2 - \dfrac{14}{3}x + \dfrac{5}{3};$

$$y'' = 6x - \frac{14}{3}.$$

Vì $y''(1) = 6 - \dfrac{14}{3} > 0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$

và $y_{CT} = y(1) = \dfrac{16}{3}.$

1.13. Hàm số

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{nếu } x \geq 0 \\ \sin\dfrac{x}{2} & \text{nếu } x < 0, \end{cases}$$

không có đạo hàm tại $x = 0$ vì :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2x}{x} = -2,$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin\frac{x}{2}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin\frac{x}{2}}{2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Mặt khác, với $x < 0$ thì $y' = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$, với $x > 0$ thì $y' = -2 < 0$.

Bảng biến thiên

x	$-\pi$		0		π
y'		$+$		$-$	
y		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Từ đó, ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{CĐ} = y(0) = 0$.

1.14. Hàm số không có cực trị khi đạo hàm của nó không đổi dấu trên tập xác định $\setminus\{m\}$.

Ta có $$y = \frac{x^2 + 2mx - 3}{x - m},$$

$$y' = \frac{(2x+2m)(x-m) - \left(x^2 + 2mx - 3\right)}{(x-m)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 2m^2 - x^2 - 2mx + 3}{(x-m)^2} = \frac{x^2 - 2mx - 2m^2 + 3}{(x-m)^2}.$$

Xét $g(x) = x^2 - 2mx - 2m^2 + 3$,

$\Delta'_g = m^2 + 2m^2 - 3 = 3\left(m^2 - 1\right)$,

$\Delta'_g \le 0$ khi $-1 \le m \le 1$.

Khi $-1 < m < 1$ thì phương trình $g(x) = 0$ vô nghiệm hay $y' = 0$ vô nghiệm và $y' > 0$ trên tập xác định. Khi đó, hàm số không có cực trị.

Khi $m = 1$ hoặc $m = -1$, hàm số đã cho trở thành $y = x + 3$ (với $x \ne 1$) hoặc $y = x - 3$ (với $x \ne -1$). Các hàm số này không có cực trị.

Vậy hàm số đã cho không có cực trị khi $-1 \le m \le 1$.