§2. Cực trị của hàm số

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a\ ;\ b)$ và $x_0 \in (a\ ;\ b)$.

1. Định lí 1

a) $\begin{cases} f'(x) > 0,\ \forall x \in (x_0 - h\ ;\ x_0) \\ f'(x) < 0,\ \forall x \in (x_0\ ;\ x_0 + h) \end{cases} \Rightarrow x_0$ là điểm cực đại của $f(x)$.

b) $\begin{cases} f'(x) < 0,\ \forall x \in (x_0 - h\ ;\ x_0) \\ f'(x) > 0,\ \forall x \in (x_0\ ;\ x_0 + h) \end{cases} \Rightarrow x_0$ là điểm cực tiểu của $f(x)$.

2. Định lí 2

a) $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases} \Rightarrow x_0$ là điểm cực tiểu của $f(x)$.

b) $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases} \Rightarrow x_0$ là điểm cực đại của $f(x)$.

B. VÍ DỤ

• ***Ví dụ 1***

Tìm cực trị của các hàm số sau :

a) $y = x^4 - 8x^3 + 432$;

b) $y = \dfrac{2x^2 + x + 1}{x + 1}$;

c) $y = 10 + 15x + 6x^2 - x^3$.

Giải

a) Hàm số đã cho xác định và có đạo hàm trên khoảng $(-\infty; +\infty)$;

$$y' = 4x^3 - 24x^2 = 4x^2(x - 6); \qquad y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 6. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		6		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$			0	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $x = 6$ là điểm cực tiểu và $y_{CT} = y(6) = 0$.

b) $y = \dfrac{2x^2 + x + 1}{x + 1}$.

Hàm số xác định với mọi $x \neq -1$.

$$y' = \frac{(4x+1)(x+1) - \left(2x^2 + x + 1\right)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 4x}{(x+1)^2} = \frac{2x(x+2)}{(x+1)^2}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-7	$\searrow$	$-\infty$ $\|$ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó, ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = -2$ và đạt cực tiểu tại $x = 0$.

$y_{CĐ} = y(-2) = -7$ và $y_{CT} = y(0) = 1$.

c) $y = 10 + 15x + 6x^2 - x^3$.

Hàm số xác định và có đạo hàm trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

$$y' = -3x^2 + 12x + 15 = -3\left(x^2 - 4x - 5\right).$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 5. \end{array}\right.$$

Mặt khác, $y'' = -6x + 12.$

$$y''(-1) = 18 > 0,\ y''(5) = -18 < 0.$$

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$, đạt cực đại tại $x = 5$ và

$$y_{CT} = y(-1) = 2,\ y_{CĐ} = y(5) = 110.$$

• ***Ví dụ 2***

Chứng minh rằng hàm số

$$y = x^3 + mx^2 - \left(1 + n^2\right)x - 5(n + m)$$

luôn luôn có cực trị với mọi giá trị của m và n.

Giải

Hàm số xác định và có đạo hàm trên khoảng $(-\infty ; +\infty)$.

Ta có

$$y' = 3x^2 + 2mx - \left(1 + n^2\right).$$

Xét phương trình $y' = 0$, ta có $\Delta' = m^2 + 3\left(1 + n^2\right) > 0$, với mọi $n, m \in$ nên phương trình $y' = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2, giả sử $x_1 < x_2$; y' đổi dấu khi x đi qua hai nghiệm.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$y_{CĐ}$	$\searrow$	y_{CT}	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đã cho luôn có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu với mọi m, n.

• ***Ví dụ 3***

a) Cho hàm số $u(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a\ ;\ b)$ và $u(x) \neq 0$, $\forall x \in (a\ ;\ b)$. Chứng minh rằng

$$\left(\sqrt[3]{u(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{3\sqrt[3]{u^2(x)}}.$$

b) Tìm các điểm cực trị của hàm số

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}\,(x-5).$$

Giải

a) Xét hàm số $y = \sqrt[3]{x}$, ta chứng minh công thức

$$y' = \left(\sqrt[3]{x}\right)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Giả sử Δx là số gia của x. Ta có

$\Delta y = \sqrt[3]{x+\Delta x} - \sqrt[3]{x}$;

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{x+\Delta x} - \sqrt[3]{x}}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2} + \sqrt[3]{x(x+\Delta x)} + \sqrt[3]{x^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2} + \sqrt[3]{x(x+\Delta x)} + \sqrt[3]{x^2}}\ ;$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Áp dụng công thức tính đạo hàm của hàm hợp, ta được

$$y' = \left(\sqrt[3]{u}\right)' = \frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}.$$

b) Theo câu a), đạo hàm của $f(x)$ là

$$f'(x) = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2(x-5)}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5(x-2)}{3\sqrt[3]{x}}.$$

$f'(x)$ không xác định tại $x = 0$ và triệt tiêu tại $x = 2$.

Ta có bảng biến thiên sau :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-3\sqrt[3]{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ $(f_{CĐ} = 0)$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$ $\left(f_{CT} = -3\sqrt[3]{4}\right)$.

C. BÀI TẬP

1.8. Tìm cực trị của các hàm số sau :

a) $y = -2x^2 + 7x - 5$;

b) $y = x^3 - 3x^2 - 24x + 7$;

c) $y = x^4 - 5x^2 + 4$;

d) $y = (x+1)^3(5-x)$;

e) $y = (x+2)^2(x-3)^3$.

1.9. Tìm cực trị của các hàm số sau :

a) $y = \dfrac{x+1}{x^2+8}$;

b) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x-1}$;

c) $y = \dfrac{x^2 + x - 5}{x+1}$;

d) $y = \dfrac{(x-4)^2}{x^2 - 2x + 5}$.

1.10. Tìm cực trị của các hàm số sau :

a) $y = x - 6\sqrt[3]{x^2}$;

b) $y = (7-x)\sqrt[3]{x+5}$;

c) $y = \dfrac{x}{\sqrt{10 - x^2}}$;

d) $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2 - 6}}$.

1.11. Tìm cực trị của các hàm số sau :

a) $y = \sin 2x$;

b) $y = \cos x - \sin x$;

c) $y = \sin^2 x$.

1.12. Xác định m để hàm số

$$y = x^3 - mx^2 + \left(m - \frac{2}{3}\right)x + 5$$

có cực trị tại $x = 1$. Khi đó, hàm số đạt cực tiểu hay đạt cực đại ? Tính cực trị tương ứng.

1.13. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{nếu } x \geq 0 \\ \sin\dfrac{x}{2} & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

không có đạo hàm tại $x = 0$ nhưng đạt cực đại tại điểm đó.

1.14. Xác định m để hàm số sau không có cực trị

$$y = \frac{x^2 + 2mx - 3}{x - m}.$$