# §2. Hàm số luỹ thừa

## A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

### 1. Định nghĩa

Hàm số $y = x^{\alpha}$, với $\alpha \in \mathbb{R}$, được gọi là hàm số luỹ thừa.

### 2. Tập xác định

Tập xác định của hàm số $y = x^{\alpha}$ là :

- $\mathbb{R}$ với $\alpha$ nguyên dương ;
- $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ với $\alpha$ nguyên âm hoặc bằng 0 ;
- $(0; +\infty)$ với $\alpha$ không nguyên.

### 3. Đạo hàm

Hàm số $y = x^{\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ có đạo hàm với mọi $x > 0$ và $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1}$.

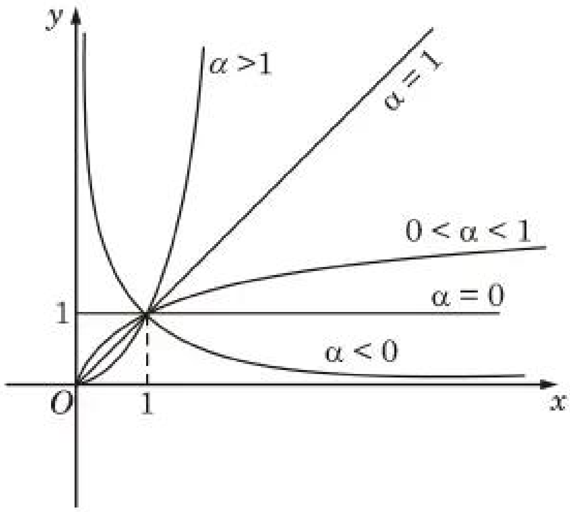
### 4. Tính chất của hàm số luỹ thừa trên khoảng (0 ; +∞)

1) Đồ thị luôn đi qua điểm (1 ; 1).

2) Khi $\alpha > 0$ hàm số luôn đồng biến, khi $\alpha < 0$ hàm số luôn nghịch biến.

3) Đồ thị của hàm số không có tiệm cận khi $\alpha > 0$. Khi $\alpha < 0$, đồ thị của hàm số có tiệm cận ngang là trục $Ox$, tiệm cận đứng là trục $Oy$.

**5.** Đồ thị của hàm số luỹ thừa $y = x^{\alpha}$ trên khoảng $(0\ ;\ +\infty)$ ứng với các giá trị khác nhau của $\alpha$ (H.13).




*Hình 13*

## B. VÍ DỤ

• ***Ví dụ 1***

Tìm tập xác định của các hàm số sau :

a) $y = 3(x-1)^{-3}$ ;    b) $y = \sqrt[4]{x^2 - 3x - 4}$.

***Giải***

a) Hàm số $y = 3(x-1)^{-3} = \dfrac{3}{(x-1)^3}$ xác định khi $(x-1)^3 \neq 0$ hay $x \neq 1$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b) $y = \sqrt[4]{x^2 - 3x - 4}$ xác định khi $x^2 - 3x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$ hoặc $x \geq 4$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-\infty\ ;-1] \cup [4\ ;+\infty)$.

• ***Ví dụ 2***

Tính đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = \sqrt{4x^2 - 3x - 1}$ ;   b) $y = \left(x^2 + x - 4\right)^{\frac{1}{4}}$ ;   c) $y = \left(x^2 - 3x + 2\right)^{\sqrt{3}}$.

***Giải***

a) Ta có $y = \sqrt{4x^2 - 3x - 1}$ nên

$$y' = \frac{8x - 3}{2\sqrt{4x^2 - 3x - 1}}.$$

b) $y' = \frac{1}{4}\left(x^2 + x - 4\right)^{-\frac{3}{4}}(2x + 1)$.

c) $y' = \sqrt{3}\left(x^2 - 3x + 2\right)^{\sqrt{3}-1}(2x - 3)$.

• ***Ví dụ 3***

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau :

a) $y = x^{-4}$ ; b) $y = x^{\frac{\pi}{2}}$.

### *Giải*

a) $y = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Hàm số đã cho là hàm số chẵn vì $y(-x) = y(x)$.

$$y' = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}.$$

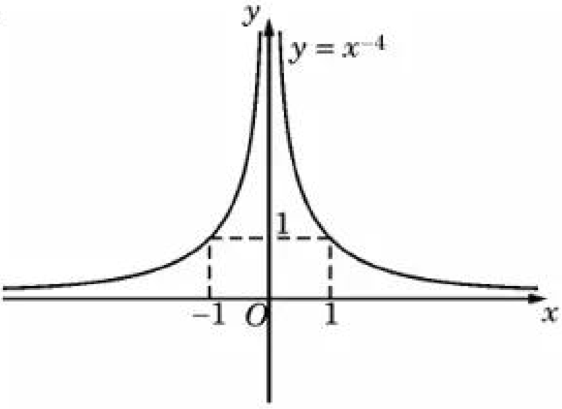
$$\lim_{x\to 0^-} y = \lim_{x\to 0^+} y = +\infty, \quad \lim_{x\to -\infty} y = \lim_{x\to +\infty} y = 0.$$

Đồ thị có tiệm cận đứng là trục tung, tiệm cận ngang là trục hoành.

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | ‖ | $-$ | |
| $y$ | $0$ ↗ | $+\infty$ | ‖ | $+\infty$ | ↘ $0$ |

• Đồ thị (H.14) nhận trục tung là trục đối xứng.




*Hình 14*

b) $y = x^{\frac{\pi}{2}}$.

Tập xác định của hàm số $y = x^{\frac{\pi}{2}}$ là $D = (0\ ;+\infty)$.

$$y' = \frac{\pi}{2}x^{\frac{\pi}{2}-1} > 0,\ \forall x \in D \text{ nên hàm số luôn đồng biến.}$$

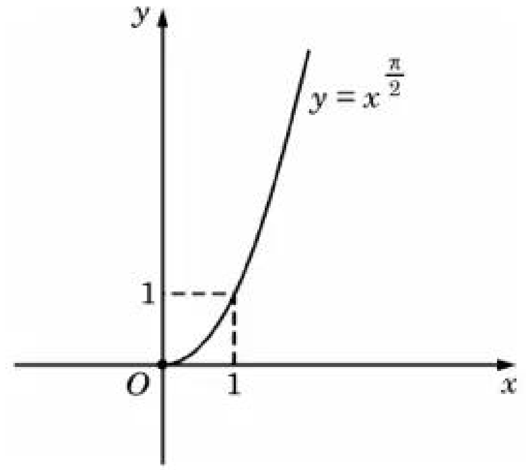
$$\lim_{x\to 0^+} y = 0\ ,\ \lim_{x\to +\infty} y = +\infty.$$

Đồ thị không có tiệm cận.

Bảng biến thiên

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $y'$ | ‖ | $+$ | |
| $y$ | ‖ $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

• Đồ thị (H.15).




*Hình 15*

• ***Ví dụ 4***

Hãy vẽ đồ thị của mỗi cặp hàm số sau trên cùng một hệ trục toạ độ :

a) $y = x^4$ và $y = x^{\frac{1}{4}}$ ;    b) $y = x^5$ và $y = x^{-5}$.

**Giải**

a) • Xét hàm số $y = x^4$, ta có

Tập xác định : ¡ .

$$y' = 4x^3.$$

$$\lim_{x\to -\infty} y = \lim_{x\to +\infty} y = +\infty.$$

Bảng biến thiên :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

• Xét hàm số $y = x^{\frac{1}{4}}$, ta có

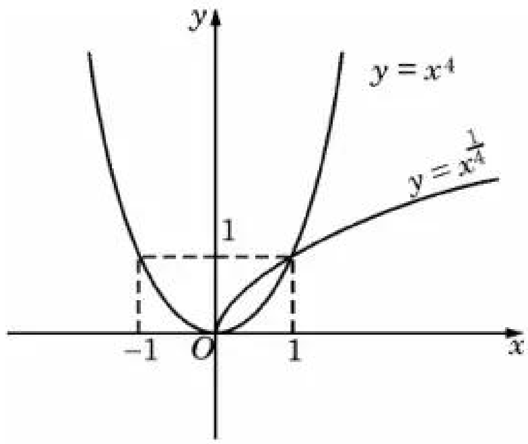
Tập xác định : $(0 ; +\infty)$.

$$y' = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} \; ; \; y' > 0, \; \forall x > 0.$$

$$\lim_{x \to +\infty} y = +\infty, \; \lim_{x \to 0^+} y = 0.$$

– Bảng biến thiên

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $y'$ | ‖ | $+$ | |
| $y$ | ‖ $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |




*Hình 16*

• Đồ thị của hai hàm số $y = x^4$, $y = x^{\frac{1}{4}}$ có dạng như Hình 16.

b) • Xét hàm số $y = x^5$.

Tập xác định : ¡ . Hàm số đã cho là hàm số lẻ.

$$y' = 5x^4.$$

Ta có $y' \geq 0, \forall x \in$ ¡ nên hàm số luôn đồng biến.

$$\lim_{x \to -\infty} y = -\infty, \; \lim_{x \to +\infty} y = +\infty.$$

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

• Xét hàm số $y = x^{-5}$.

Tập xác định : $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Hàm số đã cho là hàm số lẻ.

$$y' = -5x^{-6}.$$

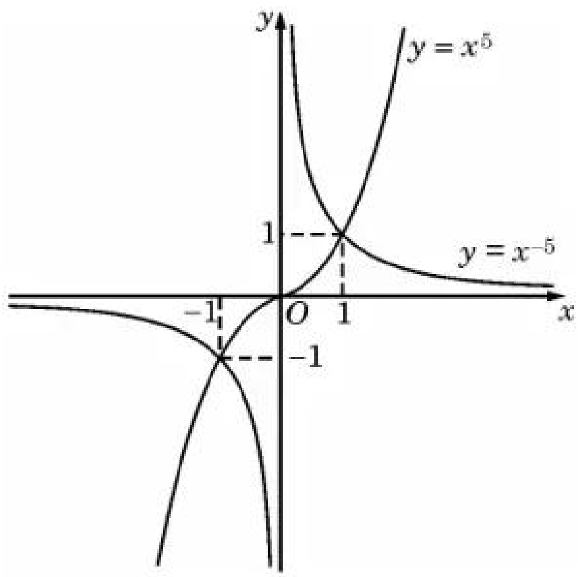
$y' < 0, \forall x \in D$ nên hàm số luôn nghịch biến trên các khoảng $(-\infty ; 0)$, $(0 ; +\infty)$.

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to +\infty} y = 0, \quad \lim_{x \to 0^-} y = -\infty, \quad \lim_{x \to 0^+} y = +\infty.$$

Đồ thị có tiệm cận ngang là trục hoành, tiệm cận đứng là trục tung.

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | ‖ | $-$ | |
| $y$ | $0$ ↘ | $-\infty$ | ‖ | $+\infty$ ↘ | $0$ |




*Hình 17*

• Đồ thị của hai hàm số $y = x^5$ và $y = x^{-5}$ có dạng ở Hình 17. Cả hai đồ thị này đều có tâm đối xứng là gốc toạ độ.

• ***Ví dụ 5***

Từ các đồ thị ở câu b) của Ví dụ 4, hãy vẽ đồ thị của các hàm số sau :

a) $y = |x|^5$ ; b) $y = \left|x^{-5}\right|$.

***Giải***

a) Ta có

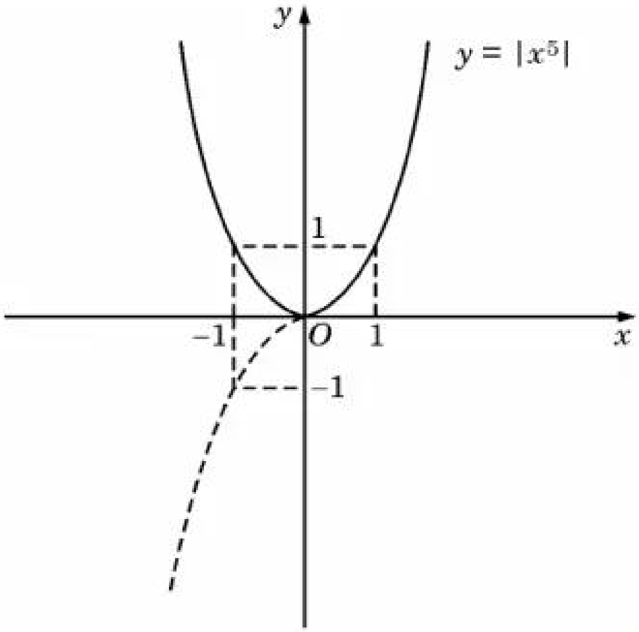
$$y = |x|^5 = \begin{cases} x^5, & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x^5, & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

Do đó, đồ thị của $y = |x|^5$ gồm hai phần :

– Phần đồ thị của hàm số $y = x^5$ ứng với $x \geq 0$.

– Phần đối xứng qua trục hoành của đồ thị hàm số $y = x^5$ ứng với $x < 0$.

Vậy đồ thị của hàm số $y = | x |^5$ có dạng như ở Hình 18.




*Hình 18*

b) Ta có

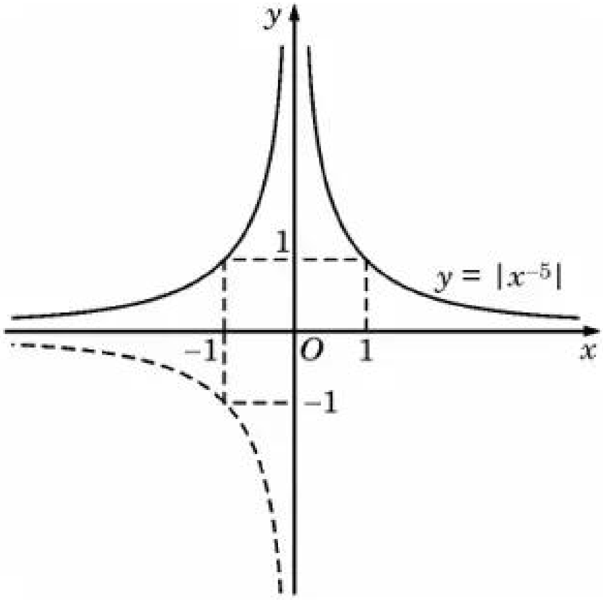
$$y = \left|x^{-5}\right| = \begin{cases} x^{-5} & \text{nếu } x > 0 \\ -x^{-5} & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

Do đó, đồ thị của $y = \left|x^{-5}\right|$ cũng gồm :

– Phần đồ thị của hàm số $y = x^{-5}$ ứng với $x > 0$ ;

– Phần đối xứng qua trục hoành của đồ thị hàm số $y = x^{-5}$ ứng với $x < 0$.

Vậy đồ thị của hàm số $y = \left|x^{-5}\right|$ có dạng như ở Hình 19.




*Hình 19*

## C. BÀI TẬP

**2.6.** Tìm tập xác định của các hàm số sau :

a) $y = (x^2 - 4x + 3)^{-2}$ ;

b) $y = (x^3 - 8)^{\frac{\pi}{3}}$ ;

c) $y = (x^3 - 3x^2 + 2x)^{\frac{1}{4}}$ ;

d) $y = (x^2 + x - 6)^{-\frac{1}{3}}$.

**2.7.** Tính đạo hàm của các hàm số cho ở bài tập **2.6**.

**2.8.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau :

a) $y = x^{-3}$ ; b) $y = x^{-\frac{1}{2}}$ ; c) $y = x^{\frac{\pi}{4}}$ ;

**2.9.** Vẽ đồ thị của hai hàm số sau trên cùng một hệ trục toạ độ :

$$y = x^{6} \text{ và } y = x^{-6}.$$

**2.10.** Vẽ đồ thị của các hàm số $y = x^2$ và $y = x^{\frac{1}{2}}$ trên cùng một hệ trục toạ độ.

Hãy so sánh giá trị của các hàm số đó khi $x = 0,5$ ; $1$ ; $\frac{3}{2}$ ; $2$ ; $3$ ; $4$.

**2.11.** Hãy viết các số sau theo thứ tự tăng dần :

a) $(0,3)^{\pi}$, $(0,3)^{0,5}$, $(0,3)^{\frac{2}{3}}$, $(0,3)^{3,1415}$ ; b) $\sqrt{2^{\pi}}$, $(1,9)^{\pi}$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\pi}$, $\pi^{\pi}$ ;

c) $5^{-2}$, $5^{-0,7}$, $5^{\frac{1}{3}}$, $\left(\frac{1}{5}\right)^{2,1}$ ; d) $(0,5)^{-\frac{2}{3}}$, $(1,3)^{-\frac{2}{3}}$, $\pi^{-\frac{2}{3}}$, $\left(\sqrt{2}\right)^{-\frac{2}{3}}$.