§2

3.9. a) $-\frac{3}{4}$; b) $\frac{35}{4}$; c) 1;

d) $\frac{4}{\ln 3} - \frac{10}{\ln 6} + \frac{3}{2\ln 2}$; e) $-\frac{1}{3}$;

g) $\frac{31}{6}$. *HD* : $\int_0^3 \left|x^2 - x - 2\right| \mathrm{d}x = \int_0^2 -(x^2 - x - 2)\mathrm{d}x + \int_2^3 (x^2 - x - 2)\mathrm{d}x.$

h) $\frac{1}{2}\ln 2$. *HD* : $\int\limits_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}dx = \int\limits_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{|\sin x + \cos x|}dx = \int\limits_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x}$.

3.10. a) $-\frac{13}{42}$; b) $2 - \frac{\pi}{2}$; c) $-\frac{468}{7}$;

d) $2\left(\sqrt{3} - 1\right)$; e) $-\frac{1}{3}\left(\frac{5\sqrt{5}}{8} - 2\sqrt{2}\right)$;

g) $\frac{\pi^2}{4}$. *HD* : Đặt $x = \pi - t$, ta suy ra

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} \frac{-d(\cos x)}{1+\cos^2 x}.$$

Vậy $\int\limits_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_{-1}^{1} \frac{dt}{1+t^2}$. Đặt tiếp $t = \tan u$.

3.11. a) $-\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4} - \frac{\ln 2}{2}\right)$; c) $\frac{3}{2}\ln 3 - 1$; d) $3\ln 3 - 6\ln 2$;

e) $\frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}$. *HD* : $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1 + x - \frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} e^{x+\frac{1}{x}}dx + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$.

Tính tích phân từng phần $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} e^{x+\frac{1}{x}}dx = xe^{x+\frac{1}{x}}\Big|_{\frac{1}{2}}^{2} - \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$.

g) $\frac{\pi}{6} - \frac{2}{9}$. *HD* : Đặt $u = x, dv = \cos x \sin^2 x dx$.

h) $\frac{e}{2} - 1$. *HD* : $\int\limits_0^1 \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx = \int\limits_0^1 \frac{e^x}{1+x}dx - \int\limits_0^1 \frac{e^x}{(1+x)^2}dx$ và tính tích phân

từng phần $\int\limits_0^1 \frac{e^x}{(1+x)^2}dx = \frac{-e^x}{1+x}\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 \frac{e^x}{1+x}dx$;

i) e^e. *HD* : Tương tự câu g).

3.12. *HD* : Với $x \in [0\ ;\ 1]$, ta có $0 \le x^n \sin \pi x \le x^n$. Do đó

$$0 \le \int_0^1 x^n \sin \pi x \mathrm{d}x \le \int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}.$$

Áp dụng quy tắc chuyển qua giới hạn trong bất đẳng thức, ta được điều phải chứng minh.

3.13. *HD* : Đặt $t = -s$ trong tích phân

$$f(-x) = \int_0^{-x} \frac{t}{\sqrt{1+t^4}} \mathrm{d}t,$$

ta được $$f(-x) = \int_0^{-x} \frac{t}{\sqrt{1+t^4}} \mathrm{d}t = \int_0^{x} \frac{s}{\sqrt{1+s^4}} \mathrm{d}s = f(x).$$ □

3.14. *HD* : Giả sử hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn trên đoạn $[-a\ ;\ a]$, ta có

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$$

Đổi biến $x = -t$ đối với tích phân $\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x$, ta được

$$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^0 f(-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$$

Vậy $$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$$

Trường hợp sau chứng minh tương tự. *Áp dụng* :

Vì $g(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ là hàm số lẻ trên đoạn $[-2;2]$ nên $\int_{-2}^{2} g(x)\mathrm{d}x = 0.$

3.15. *HD* : Đổi biến số $x = \frac{\pi}{2} - t$, ta được

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\mathrm{d}t$$

hay $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x. \qquad \square$$

3.16. Xét với $n > 2$, ta có $\quad I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x.\sin x\mathrm{d}x.$

Dùng tích phân từng phần với $u = \sin^{n-1} x$ và $\mathrm{d}v = \sin x\mathrm{d}x$, ta được

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x\mathrm{d}x = -\cos x \sin^{n-1} x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\cos^2 x\mathrm{d}x$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-2} x - \sin^n x)\mathrm{d}x = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.$$

Vậy $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$. $\square$

3.17. *HD* : Dùng tích phân từng phần với $u = (1-x)^n$, $\mathrm{d}v = x^m\mathrm{d}x$,

ta được

$$I_{m,n} = \frac{x^{m+1}}{m+1}(1-x)^n\Big|_0^1 + \frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}\mathrm{d}x.$$

Vậy $I_{m,n} = \dfrac{n}{m+1}\displaystyle\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}\mathrm{d}x = \dfrac{n}{m+1} I_{m+1,n-1}$, $n > 1, m > 0$. $\square$

3.18. a) Đúng (vì vế trái bằng $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 0$) ; b) Đúng (nhờ bài **3.15**) ;

c) Đúng (nhờ bài **3.14**) ;

d) Sai : Vì $1+\dfrac{1}{1+x+x^2+x^3}>1,\, x\in[0;2]$.